Math. P 2 11.

Mathes. Arithmet. p. 209.

R

Anfangsgründe
der
reinen Mathematik,
sonderlich für die,
welche
die Philosophie studieren
gesammelt
von

Johann Helfenzrieder,
der Gottesgelehrtheit Doctor, Churfürstl. wirkl. Rathe
und öffentlichem Lehrer der Mathematik und Experimentalphysik
auf der hohen Schule zu Ingolstadt, der Churfürstl. Bajerischen
und Churmaynzischen Akademie der Wissenschaften zu
Erfurt ordentlichem Mitgliede.

Aus dem Latein in das Deutsche übersetzt.

Günzburg an der Donau,
verlegts Johann Baptist Widenmann
Buchhändler, 1779.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Nro. III.

Die Selecta Elementorum Matheseos puræ &c. können gedruckt werden.

Regiſtr. Fol. 30.

Sign. München in dem Churfürſtl. hochlöbl. Bücher-Cenſur-Collegium den 4. Nov. 1772.

Wilhelm Wodiczka.

Vorrede.

Es giebt nicht wenige unter denen, die sich auf die Philosophie verlegen, die entweder nicht Lust, oder nicht Muße genug haben, sich etwas tiefer in die Mathematik einzulassen, doch ganz können sie derselben gewiß nicht entbehren, wenn sie nicht, sonderlich in der Physik, gar im Finstern herumtappen wollen. Nun solchen Leuten wird dieses Büchchen sonderlich bequem seyn, welches weder theuer zu kaufen, noch groß auszulesen und zu erlernen ist. Doch wird es immer für die Anfänger in der Physik hinreichend seyn das, was in dieser Wissenschaft auf die Mathematik gebautes ihnen vorgetragen wird, daraus zu verstehen. Neben dem finden sie noch Sachen darinnen, die wohl würdig sind, daß man sie wisse. Aber auch denen, die Muth genug haben, sich bis in das Innere der Mathematik einzulassen, wird es dienlich seyn: denn nachdem sie das werden erlernet, und sich geläufig gemacht haben, was dieses kleine Büchchen enthält, wird ihnen, was sie in manchen andern darnach antreffen, ganz klar vor-

kommen, das ihnen doch sonst sehr dunkel würde vorgekommen seyn, und sie werden also glücklich darinnen fortkommen, da sie sonst würden gleich im Anfange eines solchen Buches, welches sie für sich zu schwer zu seyn würden befunden haben, abgeschreckt, selbes etwa gar beyseits gelegt haben, ohne das, was sie darinnen finden, zu erlernen. Uebrigens steht zwar hier die mit der Algebra vermischte Arithmetik ganz vor der Geometrie, aber darum ist eben nicht nothwendig, daß sie der Anfänger ganz zuvor lerne. Ich weiß es wohl, es kömmt manchen Anfängern die Algebra allzutrocken, und unlustig vor: die Geometrie, da der Anblick der Figuren ihre Einbildungskraft ein wenig ergötzet, und unterstützet, ist ihnen angenehmer, und es gedünkt sie, als ob sie darinnen etwas viel handgreiflichers als in den abgesönderten und abstracten Größen der Arithmetik und Algebra anträfen. Diese mögen meinethalben, nachdem sie die gemeinen vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen erlernet haben, unterdessen das übrige stehen lassen, und um nicht überdrüßig zu werden, sich ein wenig in die Geometrie hinein lassen. Doch werden sie wenigst schon im V. Artikel, wo von den ähnlichen Dreyecken gehandelt wird, weil sie noch die Proportionen nicht verstehen, wieder zur Arithmetik zurückkehren

kehren müssen: freylich werden sie auch da, wenn sie je einen Führer haben, der sie leitet, noch vieles übergehen, und auf ein andersmal zu erlernen verschieben können, um unterdessen weiter in der Geometrie fortzuschreiten. Hat aber der Anfänger gesetztes Wesen genug auf seinem Gleise zu bleiben, so ist es allerdings für ihn besser, dieses Büchchen der Ordnung nach, wie es ist, zu durchgehen: denn bemeldtes hin und wieder Hupfen ist nicht allgemein rathsam: solche Sprünge sind nur denen zu erlauben, die sich nicht gerne auf einer langen Strasse, da sie für ihre Augen wenig Ergötzendes finden, beständig daher führen lassen. Der besondere Unterweiser muß seiner Lehrlinge Naturel, Fähigkeit und Neigung kennen, und jeden so leiten, wie es für ihn am beßten ist: er muß besorgen, daß ihnen nicht die Erlernung einer Wissenschaft verleide, die doch für das bürgerliche Leben so nützlich, zur Physik so nothwendig, zur Bauung ihres Verstandes so dienlich ist, daß wohl dieses letzte allein schon Reiz genug seyn sollte für alle, die sich den Wissenschaften widmen wollen, von der Mathematik anzufangen.

Um auch von der so berühmten, und nützlichen Differential- und Integralrechnung den Anfängern einigen Begriff beyzu-

zubringen, habe ich zu Ende einen kleinen Anhang davon beygesetzt, der in dem lateinischen Büchchen nicht ist.

Gott gebe, daß die studierende Jugend, die angepriesenen Nutzbarkeiten der Mathematik unterdessen glaube, und mit der Zeit einsehe und selbst erfahre.

Die Buchstaben an dem Rande bedeuten:

A. eine Aufgabe, a. die Auflösung derselben, B. ein Beweis, E. eine Erklärung, F. eine Figur, G. ein Grundsatz, L. ein Lehrsatz, Z. ein Zusatz.

Die

Die Rechenkunst und Algebra.

I. Vorläufige Begriffe und das Aussprechen der Zahlen.

§. 1. Die Mathematik ist eine Wissenschaft der Größen, man nennet aber eine Größe alles, was sich vermehren oder vermindern läßt: hängen nun die Theile derselben nicht zusammen, oder werden sie, ohne auf ihre Verbindung miteinander und Ordnung zu sehen, betrachtet, so heißt solche Größe eine abgesönderte Größe (quantitas discreta); eine stetige (quantitas continua) aber ist, deren Theile so aneinanderhangend, daß nichts dazwischen komme, betrachtet werden. E.

2. Die abgesönderten Größen werden in der Arithmetik, die stetigen meistens in der Geometrie abgehandelt; die Algebra aber erstreckt sich über beyde, wie wir im künftigen sehen werden.

§. 3. Die Arithmetik oder Rechenkunst ist eine Wissenschaft der Zahlen. Es ist aber eine Zahl eine Versammlung der Einheiten von einer Art; und eine Einheit das, was man zur Vergleis- E.

gleichung mit andern zum Maaße nimmt; und ein Theil derselben heißt ein Bruch.

z. B. Wenn wir Geldsummen miteinander vergleichen, nehmen wir etwa den Gulden zum Maaße, und halten jene für größer, die mehr Gulden enthält: also ist hier der Gulden eine Einheit, und der Kreuzer ist ein Bruch davon.

E. §. 4. Wenn zwo Zahlen aus einerley Einheiten bestehen, so heißen sie **Zahlen von einer Art** (Numeri homogenei), besteht aber eine Zahl aus andern Einheiten als die andere, so heißen sie **Zahlen von verschiedener Art** (Numeri heterogenei).

z. B. 3 Gulden und 4 Gulden sind Zahlen von einer Art, aber 3 Gulden und 4 Kreuzer sind Zahlen von verschiedener Art.

Z. §. 5. Zwo Zahlen also von verschiedener Art, so lange sie als solche betrachtet werden, können nicht miteinander eine ausmachen.

z. B. 2 Gulden und 3 Kreuzer machen nicht 5 Gulden, auch nicht 5 Kreuzer, obwohl 2 und 3 miteinander 5 ausmachen: wenn man aber die Gulden zu Kreuzer macht, alsdenn mögen sie zu einer gegebenen Zahl Kreuzer gezählet werden, und mit ihnen eine einzige Zahl ausmachen.

E. §. 6. Zehen Einheiten machen einen **Zehner**; und zehen Zehner heißt man **hundert**; zehen hundert aber **tausend**; und tausendmal tausend oder zehenmal hunderttausend eine **Million**; eine Million Millionen eine **Billion**; eine Million Billionen eine **Trillion**; eine Million Trillionen eine **Quadrillion** u. s. w. Wir wollen die Billion die zweyte, und die Trillion die dritte ꝛc. **Dignität der Billionen** nennen.

§. 7. **Willkührliche Gesetze.** I. Bey Zusammenzählung der Einheiten, gehe man nicht über zehen, sondern wenn man zehen gezählet hat, fange man wieder von neuem an.

II. Die

II. Die Einheit, und ersten acht Zahlen bezeichne man mit folgenden Zeichen oder Ziffern 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

III. Jedes dieser Ziffern, wenn es allein steht, und zuletzt in der Reihe mit andern, bedeutet Einheiten; eine Stelle weiter voran Zehner, und immer in jeder vorangehenden Stelle zehenmal soviel, als in der nächst folgenden.

IV. Die leeren Stellen werden mit Nullen (0) angefüllet.

§. 8. Es müssen also die Hunderte in die dritt- Z.
letzte Stelle kommen: denn weil in der vorletzten die Zehner stehen, so müssen die Hunderte, da zehen Zehner hundert (§. 6.) ausmachen, und also zehenmal soviel als die Zehner gelten, vermög des III. Gesetzes, gerade vor ihnen, folglich in der dritten Stelle von der Rechten zur Linken stehen. Das vierte Ort nach dieser Richtung müssen die Tausende, weil sie zehnfache Hunderte sind; das fünfte die Zehntausende; daß sechste die Hunderttausende; das siebende die Millionen; das dreyzehende die Billionen; das neunzehende die Trillionen behaupten: denn es ist aus dem dritten Gesetze klar, daß jede höhere Dignität der Millionen von der nächst mindern, wie die Million von den Einheiten um sechs Stellen zurück rucken müsse.

§. 9. Jedes vorangehende Ziffer, sogar 1 gilt Z.
mehr als alle nachkommende.

z. B. Es komme vor 199, das erste Zeichen 1, weil es in der drittletzten Stelle ist, gilt hier hundert; die nachfolgenden Ziffer 99 gelten nur neun und neunzig.

§. 10. Wenn man Eins aus der vorangehen- Z.
den Stelle in die nächst folgende übersetzt, so gilt es in selber zehen; also wenn man wieder eins in die nächst folgende hinüber zieht, wo es wieder zehen gel-

gelten wird, so müssen in der vorigen Stelle, wenn darinnen o gestanden, noch 9 bleiben.

A. §. 11. Eine geschriebene Zahl recht aussprechen.

a. 1. Gehet von der Rechten zur Linken, und machet je nach drey Ziffern (die Nullen mitgerechnet) einen Dupfen, so ist sie in Classen eingetheilet, derer jede drey Ziffern hat, außer der ersten auf der linken Seite, welche auch weniger haben kann.

2. Ueber den zweyten Dupfen von der Linken zur Rechten machet ein kleines Strichlein, über den vierten zwey Strichlein, über den sechsten drey u. s. w. über alle Dupfen von gerader Zahl, immer um ein Strichlein mehr, aber die Dupfen von ungerader Zahl lasset leer.

3. Bey jedem leeren Dupfen sprechet tausend; bey dem aber der ein Strichlein ober sich hat, sagt, Millionen; bey dem der zwey hat, Billionen: bey dreyen, Trillionen u. s. w. denn die Strichlein bedeuten die Dignitäten der Millionen (§. 6.).

4. Das Ziffer in der letzten Stelle von der Linken zur Rechten einer jeden Klasse sprechet durch Einheiten, das in der vorletzten durch Zehner, das in der drittletzten durch Hunderte aus; wo aber in einer Stelle eine Nulle vorkömmt, da geht darüber, ohne was auszusprechen, und wenn nach einem Ziffer mehr Nullen vorkommen, so ist nach ausgesprochener Dignität der Millionen, die die erste darchnach vorkömmt, nichts mehr zu sprechen, bis wieder Ziffer kommen, doch bey den leeren Dupfen vor dieser Dignität muß Tausend noch ausgesprochen werden.

z. B. Man soll diese Zahl aussprechen

639'''. 536. 254''. 347. 283'. 647. 523. so sprich: sechshundert neun und dreyßig Trillionen; fünfhundert sechs und dreyßigtausend, zweyhundert vier und fünfzig Billionen; dreyhundert sieben und vierzigtausend, zweyhundert und drey und

achzig

achtzig Millionen; sechshundert sieben und vierzigtausend, fünfhundert drey und zwanzig. Beygesetzte Tafel mag den Werth dieser Zahl besser zu erklären dienen.

8	Einheiten	
4	Zehner	
5	Hunderte	
7.	Tausende	
6	Zehntausend	
4	Hunderttausend	
1.	Einheiten	
8	Zehner	
2	Hunderte	
7.	Tausende	von Millionen
4	Zehntausende	
3	Hunderttausende	
0.	Einheiten	
3	Zehner	von Billionen
5	Hunderte	
6.	Tausende	
3	Zehntausende	
5	Hunderttausende	
0.	Einheiten	
3	Zehner	von Trillionen.
6	Hunderte	

Diese Zahl aber 4.000.000.000.000.000.020.030.002.003. spricht man also aus: vier Quadrillionen, zwanzigtausend und dreyßig Millionen, zweytausend und drey.

II. Die gemeinen vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 12. Addieren oder Summieren heißt eine Z. Zahl finden, der einigen gegebnen miteinander gleich ist. Die gegebenen Zahlen heißt man die Summierenden, die gefundene aber die Summe oder das Aggregat. Das Zeichen der Addition ist dieses +; und der Gleichheit dieses =.

z. B. 6+3=9 heißt: sechs und drey machen miteinander neun. Der Neuner nämlich ist die Zahl, welche

den

den summierenden sechs und drey miteinander gleich ist, und ist also die Summe dieser zwoen.

E. §. 13. Subtrahieren oder Abziehen heißt eine Zahl finden, die mit einer gegebenen einer andern gegebenen gleich ist. Die gefundene Zahl heißt der Unterschied, Differenz oder der Rest. Die gegebene Zahl von der man abzieht, heißt Minuendus, und die, welche man abzieht, Subtrahendus. Das Zeichen der Subtraction ist dieses —.

z. B. $9 - 3 = 6$ heißt: neun weniger drey machen sechs. Da haben wir also zwo gegebene Zahlen den Minuendus 9 und den Subtrahendus 3, derer Unterschied 6 ist: setzt man diesen zu einer der gegebnen nämlich zum Dreyer, so machen sie miteinander die andere gegebene nämlich 9 aus. Man nennt auch das Zeichen + das Positivzeichen, und — das Negativzeichen, jenes wird durch mehr oder und, das andere durch weniger ausgesprochen: und also bedeutet eines des andern Widerspiel: so kann man durch das erste paares Geld, durch das andere Schulden ausdrücken. Zu Anfange wird gemeiniglich das Positivzeichen ausgelassen, und kann man es also überall, wo nichts vovan steht, in Gedanken hinsetzen: z. B. $9 - 3$ ist soviel als $+9 - 3$.

Z. §. 14. Die Subtraction ist also eine Prüfung der Addition, und wiederum diese eine Prüfung der Subtraction. Denn, wenn man eine dergleichen Größen von der Summe abzieht, muß der Rest die andere geben, geschieht dieses nicht, so hat man entweder beym Addieren oder selbst in der Probe mit Subtrahieren gefehlet: Und eben so, wenn man den Rest zum Subtrahendus addiert, so muß die Summe den Minuendus geben oder man hat gefehlt.

z. B. Es seyen die summierende Zahlen $6 + 3$: derer Summe $= 9$ ist: so ist $9 - 3 = 6$, und $9 - 6 = 3$. Hätten wir in der Summe irrig 10 anstatt 9 geschrieben, so würde die Prüfung durch Subtrahieren den Fehler entdecken: denn wir erhielten $10 - 6 = 4$ anstatt 6 oder $10 - 3 = 7$ anstatt 6. Eben so wenn 3 von 9 wäre subtrahiert worden, und man hätte für die Differenz 7 anstatt 6 angeschrieben, so wird die Prüfung durch die Addition $7 + 3 = 10$

den

den Irrthum entdecken, weil die Summe, wenn nicht wäre gefehlt worden 9, nicht 10 seyn würde.

§. 15. Jede Größe ist ihr selber gleich, und G. man kann Gleiches für Gleiches setzen, ohne Aenderung der Größe.

z. B. $5+2=7$: also kann man 7 anstatt $5+2$ setzen. Wiederum $9-2=7$; also kann man 7 auch anstatt $9-2$ setzen.

§. 16. Das Ganze ist allen seinen Theilen G. miteinander gleich, und also größer als jede oder nur einige derselben insonderheit.

z. B. Der Siebner besteht aus dem Fünfer und Zweyer; ist also größer als jede von diesen zwoen Zahlen, und es ist $7=5+2$.

§. 17. Wenn also alle Theile weggenommen Z. werden, ist auch das Ganze völlig aufgehoben: und wenn man alle Theile giebt, so ist das Ganze gegeben; und man kann immer das Ganze allen seinen Theilen, oder diese jenem substituieren.

z. B. Anstatt eines Guldens kann ich 60 Kreuzer setzen, oder anstatt dieser einen Gulden.

§. 18. Auf die Grundsätze sind fast alle Beweise gebauet, darum soll man sie keineswegs außer Acht setzen. Man hüte sich aber, sie nicht mit Sätzen, die man nicht beweiset, aber erweisen sollte, oder gar mit den Vorurtheilen des gemeinen Volkes zu vermengen. Der hochw. Herr Philipp Steinmeyer hat in einem Büchchen, welches unter dem Titel Regulæ principuæ methodi mathematicæ zu Augsburg und Freyburg im Wagnerischen Verlage im Jahre 1750 erschienen, sie ist in 6 Arten getheilet. Es verdienet in der That dieser kurze Auszug der Regeln der mathematischen Lehrart, allen denen, die sich auf gründliche Kenntnisse verlegen wollen, beßtens anempfohlen zu werden.

§. 19. Verschiedene Zahlen von einer Art A. addieren.

1. Man schreibe die gegebenen Zahlen so untereinander, daß die Einheiten unter die Einheiten, die a.

Zeh-

Zehner unter die Zehner, die Hunderte unter die Hunderte kommen.

2. Alsdann mache man einen Strich darunter, und zähle besonders erstens die Einheiten zusammen, und die Summe derselben gerade unter sie, unter dem gemachten Striche. Enthält etwa diese Summe einen oder mehr Zehner, so zählt man diese zu den gegebenen Zehnern in der vorangehenden Stelle, und ihre Summe wird auch unter den Strich unter den Zehnern gesetzt; aber die Summe von zehen Zehnern den Hunderten beygesetzt.

3. Eben so sammelt man in eine Summe alle Hunderte, alle Tausende ꝛc. so erhält man endlich die ganze Summe.

z. B. Man soll diese Zahlen addieren, 5324. 1503. und 162.

schreibe sie also an:

	5324
	1503
	162
Summe	6989

Wiederum man soll diese addiren:

	983
	99
	78
Summe	1160

B. Denn wir sammeln also erstlich in der letzten Reihe alle übereinander stehende Einheiten, und schreiben ihre Summe, wenn sie keinen Zehner enthält, ganz unter sie, und eben so machen wir es mit den Zehnern in der vorletzten Reihe mit den Hunderten in der drittletzten ꝛc. Also ist es klar, daß wir auf diese Weise die Summen aller Theile in jeder Reihe, wenn sie keine Zehner in sich enthält, recht anschreiben, die dann der ganzen Summe gleich wird (§. 16.), und folglich wird also in solchem Falle recht addirt (§. 12.): macht aber in einer Reihe die Summe der darinnen vorkommenden Zahlen, als Einheiten betrachtet, einen oder mehrere Zehner aus, so ist es klar, daß diese Zehner zu der vorangehenden Reihe als Einheiten in derselben müssen gezählt werden (§. 5. und 7.), da wir dann dieses thun, so wird auch

in diesem Falle die Summe aller Theile recht angeschrieben, und also recht addirt.

§. 20. Zahlen von verschiedener Art addieren. A.

1. Man schreibe die zu jeder Art gehörige, wie a. wir es eben vor von den Zahlen von einer Art gezeigt haben, untereinander.

2. Summieret alsdann zuerst die Zahlen der niedrigsten Art, nämlich die, derer Einheiten vom geringsten Werthe sind: so oft sich aber in ihrer Summe der Werth einer Einheit von der nächst höhern Art ergiebt, merket ihn an, daß ihr ihn als eine Einheit in selber beysetzen könnet, und was darüber noch bleibet, setzet unter den Strich.

3. Eben so machet es mit den höhern Arten, aber setzet ihnen jederzeit, die aus der Summe gesammelten Einheiten von der Art der nächst höhern bey: so wird die Summe endlich alle Theile aller Zahlen in den verschiedenen Reihen, mit Uebersetzung des Werthes der mindern in die höhere, so er sich in ihrer Summe ergiebt, enthalten (§. 17.).

z. B. man soll addiren

	16	fl.	17	Kreuz.	3 Pfen.
	4		45		1
	3		26		3
	21		34		2
so wird die Summe seyn	46		4		1

§. 21. Eine kleinere Zahl von einer größern a. von eben der Art subtrahieren.

1. Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere a. ordentlich an, also nämlich, daß die Einheiten unter den Einheiten, die Zehner unter den Zehnern zu stehen kommen, und mache darnach einen Strich darunter.

2. Subtrahieret alsdann die Einheiten von den Einheiten, die Zehner von den Zehnern ꝛc. und was über bleibt, schreibet jederzeit unter den Strich.

z. B.

z. B. Es sey der Minuendus 897
der Subtrahendus 453
so ist die Differenz 444

3. Wenn es sich ereiguet, daß ein Ziffer im Subtrahendus vorkömmt, welches größer ist als das ober ihm stehende im Minuendus, so entlehnt eines aus der nächst vorangehenden Stelle, welches hier 10 gelten muß (§. 10.) und alsdann werdet ihr die untere Zahl von der obern abziehen können; auf das Ziffer aber, von den man eins entlehnet hat, machet, es zu merken, einen Dupfen, und laßt es alsdann um eins weniger gelten.

z. B. Es sey der Minuendus 897
der Subtrahendus 498
so ist die Differenz. 399

4. Wenn in einem solchen Falle, da man nämlich eins aus der nächstvorangehenden Stelle entlehnen soll, in selber kein Ziffer, sondern eine Nulle sich befindet, so müssen wir weiter linkerseits zurück gehen, bis wir endlich auf ein Ziffer kommen, und dieses Ziffer, und alle Nullen, durch die wir auf dieses Ziffer gekommen sind, mit darauf gemachten Dupfen bezeichnen, alle diese Nullen aber für Neuner, und das vorangehende Ziffer für eins weniger gelten lassen, als es sonst gelten würde, in der letzten Stelle aber haben wir um zehn mehr (§. 10.), und man wird also die Subtraction vornehmen können.

z. B. Es sey der Minuendus 8000604
der Subtrahendus 5789652
so ist die Differenz 2210952
Prüfung durch die Addition 8000604 (§. 14.)

5. Ihr sehet wohl daß in allen diesen Fällen alle Theile des Subtrahendus von den Theilen des Minuendus, folglich der ganze Subtrahendus vom ganzen Minuendus abgezogen (§. 17.), und der Unterschied,

Theile

Theile für Theile unter den Strich geschrieben werde. Wenn man nun diese Differenz zum Subtrahendus addiert, so muß die Summe, wenn nicht gefehlet worden ist, wieder den Minuendus herstellen (§§. 13. 14. und 16.).

§. 22. Zahlen von verschiedener Art voneinander subtrahieren. A.

Die Subtraction mit Zahlen von verschiedener Art, ist von der vorigen nur in dem unterschieden, daß man hier, wenn eine Einheit von der größern Art in die Stelle der kleinern, damit man abziehen kann, muß übersetzt werden, sie da nicht immer zehn, sondern soviel gilt, als Einheiten der kleinern Art bey denen, wovon man entlehnet hat, Eins ausmachen (§. 17.). A.

z. B. Der Gulden gilt in der Stelle der Kreuzer sechzig, und der Kreuzer in der Stelle der Pfenninge vier.

Es sey der Minuendus	30	fl.	14	Kr.	2	Pf.
der Subtrahendus	19		40		3	
so ist die Differenz	10		33		3	

§. 23. Multiplicieren heißt eine Zahl finden, in der eine gegebene Zahl (die man den Multiplicandus heißt) so oft enthalten ist, so oft eine andere gegebene Zahl (der Multiplicans) Eins in sich hat, oder so oft die Größe andeutet, daß der Multiplicandus in der gefundenen, die man das Factum oder Product heißt, soll enthalten seyn. Die gegebenen Zahlen, der Multiplicans nämlich, und der Multiplicandus heißen die Efficienten oder Factoren, und eine der andern Coefficiens oder Mitfactor. Das Zeichen aber der Multiplication ist bald dieses $\times$, bald nur ein Dupfen oder Strichlein zwischen den Factoren. §.

z. B. Man schreibet $2 \times 3 = 6$ oder $2 . 3 = 6$ oder $2,3 = 6$, 6 ist das Factum oder Product, 2 und 3 die

Factoren, derer einer für den Multiplicans der ander für den Multiplicandus genommen wird, und spricht, wenn 2 der Multiplicans ist, zweymal drey ist sechs, oder wenn man 3 für den Multiplicanten nimmt, dreymal zwey ist sechs.

3. §. 24. Weil dann einerley Produkt heraus kömmt, man mag diesen oder jenen Factor zum Multiplicanten, und den andern zum Multiplicandus machen, so kann man diesen oder jenen, wie man will, dafür gelten lassen. Und darum ist es auch eins, ob man nach einer gewissen, oder einer andern Ordnung, die Factorn, wenn sie mehr als zween sind, in einander multiplicieret, weil doch immer das nämliche Product heraus kömmt.

z. B. $2 \times 3 \times 4 = 6 \times 4 = 24$. oder $2 \times 3 \times 4 = 2 \times 12 = 24$. oder $2 \times 3 \times 4 = 3 \times 8 = 24$.

3. §. 25. Es ist auch gleichviel, man mag einen Multiplicandus unmittelbar mit einem Multiplicans, oder mit den Factoren, daraus dieser besteht, nach und nach multiplicieren.

z. B. 6 entsteht aus den Factoren 2 und 3: nun ist es gleich viel, ihr möget 4 unmittelbar mit 6 multiplicieren und sagen, viermal sechs ist vier und zwanzig, oder 4 zuerst mit 2, und das Produkt 8 alsdann mit 3; denn ihr erhaltet doch wieder 24, weil $3 \times 8 = 24$ ist.

§. 26. Das Zweyfache von den ersten Zahlen wissen auch die Kinder durch den Gebrauch; die Producte aus den übrigen einfachen Zahlen ineinander, zeigt folgende Tabelle, die man, um im Multiplicieren leichter fortzukommen, auswendig lernen muß.

$3 \times 3 = 9$	$4 \times 4 = 16$	$5 \times 5 = 25$	$6 \times 6 = 36$	$8 \times 8 = 64$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 5 = 20$	$5 \times 6 = 30$	$6 \times 7 = 42$	$8 \times 9 = 72$
$3 \times 5 = 15$	$4 \times 6 = 24$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 8 = 48$	$9 \times 9 = 81$
$3 \times 6 = 18$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 8 = 40$	$6 \times 9 = 54$	
$3 \times 7 = 21$	$4 \times 8 = 32$	$5 \times 9 = 45$	$7 \times 7 = 49$	
$3 \times 8 = 24$	$4 \times 9 = 36$		$7 \times 8 = 56$	
$3 \times 9 = 27$			$7 \times 9 = 63$	

§. 27. Wenn der Multiplicandus aus mehr Theilen besteht, und jeder derselben mit dem Multiplicanten multipliciert werden, so ist die Summe aller dieser Producte dem Producte aus dem ganzen Multiplicandus in dem Multiplicanten gleich. Denn wenn alle Theile des Multiplicandus so oft genommen werden als der Multiplicans Einheiten hat, so ist auch der ganze Multiplicandus so oft genommen. Z.

z. B. 24×3 ist $= (20 \times 3) + (4 \times 3)$.

§. 28. Eine gegebene Zahl von mehr Ziffern, durch eine, die aus einer Ziffer bestehet, multipliciren. A.

1. Die Zahl von mehr Ziffern lasse für den Multiplicandus gelten (§. 24.) und unter seine letzte Ziffer setze den andern Factor als den Multiplicanten, der nur eine Ziffer hat. a.

2. Mache unter diesem Multiplicanten einen Strich, und multipliciere von der Rechten zur Linken ruckend jede Ziffer des Multiplicandus mit dem Multiplicanten; die Producte aber schreibe jede so unter den Strich, daß die linke Ziffer eines jeden Produktes zu den nächst linkern gezählt werde (§. 19.), und die Multiplication wird also recht verrichtet seyn.

z. B. Es sey der Multiplicandus 345
der Multiplicans 3

besondere Producte 15, 12, 9

oder für=zer: 345 × 3 = 1035

so ist das ganze Product 1035

Denn wir haben auf diese Weise die besondere Producte jeder Theile des Multiplicandus in den Multiplicanten gesammelt, und ihre Summe unter den Strich geschrieben: also enthält die unter dem Stri-

che geschriebene Zahl das ganze Product des ganzen Multiplicandus in den Multiplicanten in sich (§. 27.), und ist also recht multipliciert worden (§. 23.).

A. §. 29. Eine Zahl mit einer oder mehr Ziffern durch einen Multiplicanten multiplicieren, der nur aus Eins, und einer oder mehr angehengten Nullen besteht.

a. Da braucht es nichts, als eben so viele Nullen an die gegebene Zahl anhenken, als in dem Multiplicanten vorkommen.

z. B. 1035 soll mit 10 multipliciert werden, so ist das Produkt 10350; eben so 1035 X 100 ist = 103500.

Denn macht den Multiplicanten zum Multiplicandus, und die gegebenen Zahl von Ziffern zum Multiplicanten (§. 24.), so ist ist es klar, daß wenn jener ein Zehner oder Hunderter ꝛc. ist, in dem Producte so viele Zehner oder Hunderter ꝛc. seyn müssen, als die gegebene Zahl mit Ziffern Einheiten in sich enthält (§. 23.). Nun dieses erhalte ich, wenn ich dem Factor von Ziffern so viele Nullen anhänge, als der andere Nullen nach Eins hat. Denn durch eine angehängte Nulle wird er zehnmal durch zwo hundertmal ꝛc. werther, als er zuvor war (§. 7.), also erhalten wir auf diese Weise das gesuchte Produkt richtig.

z. B. Man soll 35 mit 10 multiplicieren, oder weil es gleich viel ist, 10 mit 35, so muß das Product 35 Zehner enthalten: setze ich aber an 35 eine Nulle hin, so hält das Produkt 350 wirklich 35 Zehner in sich. Eben so, wenn 35 mit 100, oder 100 mit 35 multipliciert wird, und ich schreibe das Product 3500 an, so hat es so viele Hunderte in sich, als viele Einheiten in 35 sind.

A. §. 30. Eine Zahl durch einen Multiplicanten von einer Ziffer mit einer oder mehr folgenden Nullen multiplicieren.

Mul-

Multiplicicre den Multiplicandus mit der Ziffer a. des Multiplicanten (§. 28.), und hänge an das Product so viele Nullen als hinter dieser Ziffer im Multiplicanten waren.

z. B. Wenn der Multiplicandus 345 und der Multiplicans 3000 ist, so ist das Produkt 1035000.

Denn, wenn z. B. der Multiplicans 300 = 3 × 100 B. (§. 29.) ist, so ist es ein Ding, ob ich den Multiplicandus gleich unmittelbar mit 300, oder zuerst mit 3, und darnach das herausgebrachte Product mit 100 multipliciere (§. 25.); nun dieses thun wir, wenn wir den Multiplicandus erstlich mit der in dem Multiplicanten enthaltenen Ziffer 3 multiplicieren (§. 28.), und darnach dem Producte zwo Nullen (soviel nämlich der Ziffer 3 gefolget sind) anhängen (§. 29.): also erhalten wir auf diese Weise das gehörige Product (§. 23.).

§. 31. **Eine gegebene Zahl von mehr Ziffern, durch eine andere auch von mehr Ziffern multiplicieren.** A.

1. Schreibe den Multiplicanten unter den Multiplicandus, wie man beym Subtrahieren den Minuendus unter den Subtrahendus schreibt (§. 21.), und mache unter dem Multiplicanten einen Strich. a.

2. Multipliciere den Multiplicandus durch jede Ziffer des Multiplicanten (§. 29.), die Producte aber schreibe also darunter, daß immer die letzte Ziffer (die Nullen auch mitgerechnet) eines Productes unter jener Ziffer des Multiplicanten stehe, die dieses Produkt, da man mit ihr den Multiplicandus multiplicierte, hervorgebracht hat.

3. Diese Partialproducte setze alle in eine Summe zusammen, so hast du das ganze Product.

z. B. Man soll diese zwo Zahlen 345 und 233 miteinander multiplizieren, so mache es also wie folgt:

Mul=

Multiplicandus 345
Multiplicans 233

Partialproducte { 1035 / 1035 / 690

Summe davon oder das ganze Product 80385

B. Denn, wenn wir einen Multiplicandus durch einen Multiplicanten von mehr Ziffern multipliciren, z. B. durch 233, so ist es so viel, als ob wir ihn durch die Theile dieser Zahl nämlich, durch 200, 30 und 3 (§. 8.) multiplicierten, und die herauskommenden Partialproducte darnach in eine Summe sammelten (§. 17.); nun, wenn wir nach der hier angewiesenen Art verfahren, so bekommen wir die Partialprodukte eben so, als wenn wir den Multiplicandus durch die Theile des Multiplicanten 200, 30, und 3 multipliciert hätten (§§. 28. und 30.); denn bey dem ersten Partialproducte muß man sich noch eine, nach den andern noch zwo Nullen beygesetzt vorstellen; also werden die Partialproducte auf diese Weise richtig erhalten, und sie alle zusammen machen das ganze Product aus (§§. 17. und 19.), und also wird recht multipliciert.

§. 32. Wenn Nullen im Multiplicandus, oder in beyden Factorn zuletzt nach den Ziffern vorkommen, so schreibe man sie, Kürze halber, so untereinander, daß die letzte Ziffer des Multiplicanten unter der letzten des Multiplicandus zu stehen komme, und Multipliciere, als ob die Nullen gar nicht da wären, dem Producte aber hänge man so viele Nullen an, als in beyden Factorn nach den Ziffern waren, wie diese Beyspiele zeigen:

3400	3400	3400	3400
2	20	200	2000
6800	68000	680000	6800000

E. §. 33. Dividieren heißt eine Zahl finden (die man den Quotient nennt), welche so oft in einer gegebenen Zahl (dem Dividendus) enthalten ist,

so

so vielmal eine andere gegebene (der Divisor) Eins in sich enthält. Das Zeichen der Division sind zween Punkte, die man nach dem Dividendus vor dem Divisor setzt, oder ein horizontaler Querstrich, ober den man den Dividendus, und unter ihm den Divisor schreibt.

z. B. $6 : 3 = 2$ oder $\frac{6}{3} = 2$ heißt 3 ist in 6 zweymal enthalten. Sechs ist also hier der Dividendus, drey der Divisor und zwey der Quotient, welcher, weil er nur aus zwo Einheiten besteht, andeutet, daß 3 in 6 zweymal enthalten sey.

§. 34. Also hat man den Dividendus als ein 3. Product aus dem Quotienten in den Divisor anzusehen: und darum ist die **Division eine Prüfung der Multiplication, und diese eine Prüfung der Division.** Denn wenn man den Quotienten (z. B. 2) mit dem Divisor (3) multiplicieret, muß das Product (6), wenn nicht gefehlet worden ist, den Dividendus geben, und **wenn man ein Product durch einen Factor dividieret, so muß der Quotient der andere Factor seyn.**

z. B. $6 : 3 = 2$, und $6 : 2 = 3$, weil $2 \times 3 = 6$ ist.

§. 35. Darum dienet eben die Tabelle die wir 3. §. 26. zum Multiplicieren angeführet haben, und die man **Tabula Pythagorica** oder das **Einmaleins** nennt, auch zum Dividieren, weil man die Quotienten durch sie findet: denn wenn der Divisor nur aus einer Ziffer besteht, und der Dividendus unter hundert ist, zeiget diese Tabelle den andern Factor.

z. B. Man fraget wie oft 7 in 62 enthalten sey: so findet man in selber Tabelle unter den Producten von 7 die nächst kleinere Zahl 56, und den dazugehörigen andern Factor 8 nämlich $7 \times 8 = 56$; daraus nehme ich ab, 7 sey in 62 achtmal enthalten, es bleibt aber, wenn ich $7 \times 8 = 56$ von 62 abziehe, noch 6 übrig, weil nämlich 62 nicht unter den Producten von 7 angetroffen wird, ist eben dieses

ein Zeichen, daß die Zahl 62 sich mit 7 nicht genau und ohne Rest theilen lasse.

A. §. 36. Eine gegebene Zahl durch einen Divisor von einer einzigen Ziffer dividieren.

a. 1. Setze den Divisor, wenn er kleiner ist als die erste Ziffer des Dividendus, unter selbe; wenn er aber größer ist, unter die nächst folgende.

2. Untersuche durch Hilfe des Einmaleins wie oft der Divisor in der ober ihm stehenden Ziffer, oder in selber sammt der vorangehenden, wenn er unter der zweyten steht, enthalten sey. Nun die Zahl, die dieses andeutet, setze als den ersten Theil des Quotienten hinter den zur Rechten gemachten Strich, das Product aber aus dieser Zahl in den Divisor setze also unter den Divisor hin, daß seine letzte Ziffer gerade unter ihm stehe, und mache einen Strich darunter.

3. Alsdann ziehe es von den Ziffern ober dem Divisor, oder von dieser und der vorangehenden ab, und was über bleibt, setze unter den gemachten Strich).

4. An diesen Rest setze noch die nächste Ziffer aus dem Dividendus hin, und den Divisor darunter, und fahre weiter fort nach der zweyten und dritten Regel, bis im Divisor nichts mehr herauszusetzen übrig ist, so ist die Division vollbracht. Siehe hier zwey Beyspiele:

Dividendus	867	289	Dividend.	1345	$448\frac{1}{3}$
Divisor	3..	Quotient	Divisor	3..	Quot.
erstes Product	6..			12..	
Rest, und nächste Ziffer	26.			14.	
Divisor	3.			3.	
zweytes Product	24.			12.	
Rest, und nächste Ziffer	27			25	
Divisor	3			3	
drittes Product	27			24	
Rest	0			1	

Wenn

Wenn zuletzt was überbleibt, setzt man es zum Quotienten hin, und den Divisor darunter, als einen Bruch: von den Brüchen wird im Künftigen gehandelt werden.

Kürzer macht man die Division also: Man schreibt die Reste über den Dividendus, und rückt den Divisor immer weiter, das übrige macht man aus dem Gedächtnisse.

22	421
867(289	1345(448 $\frac{1}{3}$
333	333

§. 37. Eine Zahl mit einem Divisor dividieren, der aus mehr Ziffern besteht.

1. Schreibe den Divisor unter die erste Ziffer a. des Dividendus linkerseits an, doch um eine Stelle weiter rechts, wenn er sonst größer wäre, als die ober ihm stehende Ziffer, und untersuche aus dem Einmaleins, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten (oder den ersten zwoen, wenn er unter der zweyten steht) des Dividendus enthalten sey.

2. Mit der Zahl, die es andeutet, multipliciere den ganzen Divisor, und wenn sich dieses Product von den ober dem Divisor stehenden Zahlen abziehen läßt, setze die gefundene Zahl als einen Theil des Quotienten rechterseits hinter den Strich, das Product aber ziehe von den Ziffern des Dividendus, die ober dem Divisor stehen, ab, und setze den Rest unter den Strich, der unter das Product ist gemacht worden.

3. Wenn aber das Product, weil es zu groß ist, sich nicht davon abziehen läßt, so setze einen andern etwas kleinern Quotienten für den ersten, und sehe, ob sich das neue Produkt aus diesem in den Divisor, von den Ziffern ober dem Divisor abziehen läßt; wenn es nicht angienge, müßte der Quotient noch kleiner genommen werden: er wäre aber zu klein, wenn nach geschehener Subtraction der Rest größer als der Divisor wäre.

4. Nach geschehener Subtraction wird zum Rest noch eine Ziffer aus dem Dividendus herabgesetzt, und der Divisor darunter um eine Stelle weiter rechterseits gerückt, und wieder nach vorigen Regeln verfahren, bis nichts mehr aus dem Dividendus herab zu setzen übrig ist. Siehe hier ein Beyspiel:

Dividendus	15489	($484\frac{1}{32}$ Quotient.
Divisor	32..	
erstes Product	128..	
Rest mit folgender Ziffer	268.	
Divisor	32.	
zweytes Product	256.	
Rest mit folgender Ziffer	129	
Divisor	32	
drittes Product	128	
letzter Rest	1	

Kürzer mache man es also:

32) 15489 ($484\frac{1}{32}$
128..
268.
256.
129
128
1

oder also:

1
22
3621
15489 ($484\frac{1}{32}$
3222
33

5. Der Beweis der Auflösung in beyden Fällen ist der nämliche: nämlich die gefundene Zahl zeigt uns an, wie oft der Divisor in allen Theilen des Dividendus, also wie oft er im ganzen Dividendus enthalten sey (§. 16.): folglich wird auf diese Weise recht dividieret.

Also in dem letzten Beyspiele sind die Theile

des Dividendus:		des Quotienten:	
der erste	12800		
der zweyte	2560	400	
der dritte	128	80	
und der Rest	1	4	
Summe	15489	Summe	484

Es ist aber klar, daß der Divisor 32 in dem Theile des Dividendus 12800 so vielmal öfter als in 120 enthalten sey, soviel gröser die Zahl 12800 als 128 ist

ist (§. 34.), das ist, hundertmal öfter (§. 8.); also weil 128 : 32 = 4 ist, so muß 12800 : 32 = 400 seyn; und eben so, weil 256 : 32 = 8 ist, so muß 2560 : 32 = 80 seyn.

§. 38. Zur Prüfung der Division multiplicieret den Quotienten mit dem Divisor und setzet noch den letzten Rest hinzu: giebt nun die Summe den Dividendus, so ist es ein Zeichen, daß man recht gerechnet habe.

Aber kürzer ist folgende Prüfung:

A. a. 1. Wirf aus dem Quotienten und auch aus dem Divisor neune weg, so oft du kannst: (man giebt dabey auf den Werth der Ziffern aus ihrer Stellung (§. 7.) nicht acht, sondern betrachtet sie, als ob sie nur Einheiten anzeigten) bemerke beyde Reste, und schreibe einen rechts, den andern links in ein schief stehendes Kreuz.

2. Multipliciere diese zween Reste miteinander, und zum Producte addiere noch den letzten Rest des Dividendus, der sich durch den Divisor nicht hat theilen lassen, wenn je ein solcher vorhanden ist: wirf wieder neune weg, so oft du kannst, und was überbleibt, schreibe oben in das Kreuz.

3. Wirf neune, so oft du kannst, aus dem Dividendus, und schreibe den Rest unten in das Kreuz, wenn nun dieser mit dem oben im Kreuze stehenden der nämliche ist, so ist es ein wahrscheinliches Zeichen, daß man nicht gefehlt habe.

Im vorigen Beyspiele.

A. a. Will man eine ähnliche Prüfung beym Multiplicieren anbringen, so setze rechter und linkerseits des Kreuzes das, was von den Factorn überbleibt, wenn man neune wegwirft, so oft man kann; oben in das Kreuz setze den Rest von dem Producte dieser zween Reste, nachdem alle Neuner weggeworfen worden; und unten den Rest aus dem Producte, das aus den gegebenen Factoren selbst entstanden ist, mit weggeworfenen Neunern, so muß unten und oben im Kreuze das nämliche stehen, wenn im Rechnen nicht ist gefehlet worden.

Also in dem oben §. 31. angeführten Beyspiele war der Multiplicans 233, aus diesem bekomme ich rechterseits ins Kreuz zu schreiben 8. Der Multiplicandus war 345, dieser giebt mir auf die linke Seite 3: ihr Product nämlich

3 X 8 = 24

3 X 8 = 24 giebt oben zu schreiben 6: das Product aus den Factorn 8o385, giebt auch 6.

aus dem Multiplicanten 8

3 aus dem Multiplicandus

aus dem Producte der Reste

aus dem Producte der Fact.

§. 39. Wenn man Zahlen von verschiedener Art dividieren soll, macht man bey der höhern den Anfang, und wenn was überbleibt, reduciert man solchen Rest zur
A. kleinern Art, und addiert alsdann den reducierten Rest zu den Zahlen der kleinern art, und alsdann erst dividiert man
a. diese Summe. Es sey z. B. der Dividendus 14 fl. + 15 kr. und der Divisor 3, so giebt 14 : 3 zum Quotienten 4 fl. und es bleiben 2 Gulden übrig. Diesen Rest 2 multipliciere mit 60, so werden die 2 Gulden zu Kreuzer reduciert, zum Producte 120 addiere die übrigen 15 kr., und dividiere darnach die Summe 135 mit den Divisor 3, so erhaltest du 45: also ist des ganze Quotient 4 fl. 45 kr. Beym Multiplicieren aber mit solchen Zahlen fängt man mit verkehrter Ordnung bey der niedrigsten Art an: z. B. es sey der Multiplicandus 4 fl. 45 kr., und der Multiplicans 3, so multipliciere zuerst 45 mit 3, und das Product 135 kr. dividiere durch 60, so giebt der Quotient 2 die Zahl der darinn enthaltenen Gulden, und bleiben noch 15 kr.; darauf multipliciere auch die Zahl der höhern Art, nämlich 4 fl., mit dem Multiplicanten 3, und du erhältst 12 fl.; zu diesem Producte addiere 2 fl., die sich aus der Zahl der Kreuzern ergeben haben, so ist das ganze Produkt 14 fl. 15 kr. Wenn dieses Wenige von der praktischen Arithmetik nicht genug ist, der muß sich aus andern weitläufigern Schriften von dieser Materie, die man in Menge findt, oder besser von einem Privatinstructor weitern Unterricht geben lassen.

III. Von der Algebra, und den ersten vier algebraischen Rechnungsarten mit ganzen Zahlen.

E. §. 40. Eine Gleichung ist der Ausdruck einer Größe durch zween, dem Scheine nach, verschiedene, aber gleiche Werthe. Die Wissenschaft unbe-

bekannte Größen, von denen in Ansehung bekannter schon etwas bekannt ist, durch Hilfe der Gleichungen zu finden, nennt man die Algebra. Die Größen der Gleichung, die mit dem Zeichen = verbunden sind, heißt man die Glieder der Gleichung. Die Größen aber, die in den Gliedern mit + oder — verbunden werden, werden die Theile der Glieder (Termini) genannt.

z. B. 12 läßt sich ausdrücken durch 7 + 5, oder 20 — 8, oder durch 3 . 4, oder durch 24 : 2, und also entstehen folgende Gleichungen: 7 + 5 = 12, 20 — 8 = 12, 4 . 3 = 12, 24 : 2 = 12. Wie auch 7 + 5 = 20 — 8 ꝛc. In den ersten Gleichungen 7 + 5 = 12, hat das erste Glied zween Theile, nämlich 7 und 5.

§. 41. Wenn man von allgemeinen Größen Erhandelt, drückt man sie, Kürze halber, durch die Buchstaben des Alphabets aus. Die Rechnung mit solchen Buchstaben, derer Werth aber zuvor muß bestimmet werden, heißt die Buchstabenrechnung (caculus literalis, oder Arithmetica speciosa). Die Zeichen für die ersten vier Rechnungsarten sind die nämlichen, die wir bey den Zahlen gebrauchen.

z. B. Die Summe aus der kleinern Größe und Differenz ist der größern gleich, wird also ausgedrückt: m + d = M, da m die kleine Größe, M die größere, und d ihre Differenz bedeutet.

§. 42. Weil die bey dieser Rechnung gebrauchten Buchstaben eben sowohl eine abgesonderte, als stetige Größe bedeuten können, so kann man die algebraische Rechnungen mit Buchstaben sowohl auf die Arithmetik als Geometrie anwenden: so weit die Buchstabenrechnung der Arithmetik dienet, nennen sie einige die Universalarithmetik. Gemeiniglich aber werden die ersten Buchstaben des Alphabets für bekannte, die letztern aber für unbekannte oder gesuchte Größen gebraucht. Der Hauptgrund der Gleichungen sind die schon oben §§. 15. und 16. angeführten und folgende Grundsätze.

G. §. 43. Wenn zwo Größen einer dritten gleich sind, sind sie auch selbst einander gleich.

z. B. $5+2=7$
$9-2=7$
also $5+2=9-2$

oder setze $m+d=M$
$a=M$
so ist $m+d=a$.

G. §. 44. Größen die Gleichen gleich sind, sind auch einander gleich.

z. B. $15-3=6\times 2$
$7+5=12$
$6\times 2=12$
also $15-3=7+5$

oder es sey $m+d=M$
$n-c=a$
und $a=M$
so ist $m+d=n-c$.

G. §. 45. Wenn man die nämliche Größe, oder gleiche zu gleichen addieret, so sind die Summen gleich.

G. §. 46. Wenn man zur größern und zur kleinern Größe eine nämliche dritte, oder gleiche Größe addiert, so ist die erstere Summe größer als die andere, und was größer ist als das Größere, ist auch größer als das Kleinere.

Das Größere bedeutet man mit diesem $>$, und das Kleinere mit diesem $<$ Zeichen. Also weil $7>5$, so ist $(7+3)>(5+3)$ und wenn $m<M$, so ist auch $m+d<M+d$, wiederum weil $9>8$, und $8>7$, so ist auch $9>7$.

G. §. 47. Wenn man die nämliche Größe, oder Gleiche von Gleichen abziehet, so bleibt Gleiches über.

G. §. 48. Wenn man von einer größern und einer kleinern Größe die nämliche oder gleiche abzieht, ist der erste Rest größer als der andere.

z. B. $7>5$, also auch
$(7-2$ oder $5)>(5-2$ oder $3)$

wenn $M>m$
so ist auch $M-g>m-d$.

G. §. 49. Wenn man gleiches mit gleichen multiplicieret, sind die Producte gleich.

z. B.

z. B. $12 = 5 + 7$ multipliciere in dieser Gleichung beyde Glieder mit 2, so ist $24 = 10 + 14$.

§. 50. Wenn man das Größere und Kleinere durch die nämliche oder gleiche Größen multiplicieret, so ist das erste Product größer als das zweyte. G.

z. B. $3 > 2$: also ist auch 3×4 oder $12 > 2 \times 4$ oder 8.

§. 51. Wenn man Gleiches mit Gleichen dividiert, sind die Quotienten gleich. G.

z. B. Wenn man $6 + 4$ mit 2 dividiert, sind die Quotienten $3 + 2$ oder 5; und wenn man 10, welche Zahl $= 6 + 4$ ist, mit 2 dividiert, ist der Quotient auch 5.

§. 52. Wenn man das Größere und Kleinere, durch eine nämliche oder gleiche Größe dividiert, ist der erstere Quotient größer als der andere. G.

z. B. $14 > 12$: darum ist auch $14 : 2$ oder $7 > 12 : 2$ oder 6.

§. 53. Soviel eine Größe A wächst, wenn man zu ihr eine andere B addieret, soviel wird die daraus entstandene Summe wieder vermindert, wenn man B wieder davon subtrahiert. Und eben so, soviel eine Größe A zunimmt, wenn man sie mit B multipliciert, soviel wird das daraus entstandene Product, wenn es mit B dividiert wird, wieder vermindert. G.

z. B. Wenn 3 zu 12 addiert wird, erhält man 15, nimmt man von 15 wieder 3 weg, so giebt der Rest wieder die Zahl 12. Und eben so, wenn 4 mit 3 multiplicieret wird, ist das Product 12, dividiert man aber 12 wieder mit 3, so ist der Quotient 4 wieder die vorige Zahl.

§. 54. Eine positive Größe also hebt eine ihr gleiche negative Größe auf, und wieder eine negative hebt eine gleiche positive auf. Z.

z. B. Wenn $M = m + d$ ist, so ist $m + d - M = 0$, und $M - m - d$ ist auch $= 0$.

§. 55.

§. 55. Willkührliches Gesetz, die Multiplikation mit Buchstaben geschieht oft ohne dazwischen gesetztes Zeichen.

z. B. Man soll a mit b multiplicieren, so kann man das Product ab anschreiben. Eben so schreibt a mit a, multipliciert aa, und wenn a, b, und c miteinander sollen multipliciert werden, schreibt man abc, und man heißt alsdann einen Buchstaben des andern Coefficienten, oder Mitfactor, und auch die Ziffer, wenn sie zu Buchstaben kommen, sind Coefficienten. Z. B. in dem Producte 2a ist 2 der Coefficient von a, und a der Coefficient von 2.

§. 56. Willkührliches Gesetz: wenn mehr Größen durch eine sollen multipliciert werden, schließt man die mehrern zwischen ( ) ein, oder man macht einen Strich darüber.

z. B. Man soll a+b+c mit d multiplicieren, so schreibt man (a+b+c)d, oder d(a+b+c) oder $\overline{a+b+c} \times d$, oder $d \times \overline{a+b+c}$. Eben so wenn soll a+c mit b—d multiplicieren, schreibt man (a+c)(b—d), oder $(a+b) \times (b-d)$, oder $\overline{a+b} \times \overline{b-d}$.

§. 57. Willkührliches Gesetz: wenn eine Größe mehr andere dividiert, oder wenn mehr andere eine dividieren, schließt man die mehrern in ( ) ein, oder man macht über die mehrern einen Strich, oder man macht einen Strich unter die Größe, die man dividieren soll, und schreibt den Divisor darunter.

z. B. Man soll a+b—c durch d dividieren, so schreibt man entweder (a+b—c):d, oder a+b—c:d, oder $\frac{a+b-c}{d}$.

Wenn aber a soll durch b—c dividiert werden, so schreibt man a:(b—c), oder a:b—c, oder $\frac{a}{b-c}$.

Wenn man soll a+b durch c—b dividieren, schreibt man (a+b):(c—b), oder $\overline{a+b}:\overline{c-b}$, oder $\frac{a+b}{c-b}$.

§. 58.

§. 58. Größen mit den nämlichen oder u. verschiedenen Zeichen addieren.

1. Schreibet die Größen, welche mit den näm- a.
lichen Buchstaben angedeutet sind, gerad unterein-
ander.

2. Wenn die Zeichen von den Buchstaben einer-
ley sind, so addieret die Buchstaben, wie man die Zahlen addiert; sind sie aber verschieden, so sub-trahiert die kleinere Größe von der größern, und vor den Rest setzet das Zeichen der größern Größe.

3. Die Größen, welche durch verschiedene Buch-staben angedeutet werden, werden nur mit ihren Zei-chen zu den andern hingesetzt.

z. B. $3a + 2b - 4c - 5d + 2e + f$
$a - 5b + 3c + 6d - 2e - g$

Summe $4a - 3b - c + d + f - g$.

Denn Größen, die mit einerley Buchstaben ange- B.
deutet werden, und entweder beyde ein Positivzei-
chen +, oder beyde ein Negativzeichen — vor sich haben, sind Größen von einer Art (§. 4. §. 13.); also ist die Addition bey diesen wie bey den gemei-nen Zahlen ꝛc. Wenn aber die Zeichen verschieden sind, so heben die positiven Größen gleich große ne-gative auf, und auch die negativen werden von gleich großen positiven aufgehoben (§. 54.): also hat man nur den Ueberschuß der größern über die kleinern Grö-ßen mit jener ihren Zeichen anzuschreiben. Sind aber die Buchstaben selbst verschieden, so bedeuten sie Größen von verschiedener Art, und können also nicht wie die Zahlen zusammengezählt (§. 5.), son-dern nur nebeneinander mit ihren Zeichen hingeschrie-ben werden.

§. 59. Beym Subtrahieren werden alle vor u.
den Größen stehende Zeichen in widrige verän-dert.

B. Denn hat eine Größe vor sich ein Positivzeichen nämlich +, so ist es klar, daß, wenn man sie subtrahiert, selbe das Negativzeichen — vor sich haben müsse (§. 13.): soll man aber eine negative Größe, die nämlich — vor sich hat, abziehen, so muß nicht sie, sondern ihr Abgang durch die Subtraction aufgehoben werden: nun dieses geschieht, wenn man sie wirklich hersetzt, oder positiv macht, da muß sie aber + von sich selbsten haben (§. 13.); also wird in beyden Fällen durch die Subtraction, das vor der Größe, die man abziehen soll, stehende Zeichen in ein widriges verändert.

Z. §. 60. Folglich ist die Subtraction einer Größe nichts anders, als eine Addition derselben mit widrigen Zeichen.

A. §. 61. Größen mit den nämlichen oder widrigen Zeichen voneinander subtrahieren.

a. Aendert die Zeichen der Größen, die ihr subtrahieren sollet in widrige, und addiert sie (§. 60.).

z. B. Es sey die Minuenda $4a - 3b - c + d + f - g$
die Subtrahenda $a - 5b + 3c + 6d - 2e - g$
diese mit widrigen Zeichen ist $-a + 5b - 3c - 6d + 2e + g.$
folglich ist der Rest $3a + 2b - 4c - 5d + 2e + f$ (§. 58)

k. §. 62. In der Multiplication bekömmt das Product vor sich +, so oft die Factoren vor sich einerley Zeichen haben; sind aber die Zeichen vor den Factorn verschieden, so bekömmt das Product vor sich —

z. B. $+a \times +b = +ab$
$-a \times -b = +ab$
$-a \times +b = -ab$
$+a \times -b = -ab$

B. Wenn beyde Factorn vor sich + haben, ist es für sich selbst klar, daß auch vor dem Producte müsse + gesetzt

gesetzt werden, denn man muß ja im Producte einen Factor so oft setzen, als es der andere andeutet.

Wenn die Zeichen vor den Factorn verschieden sind, wenn z. B. — a mit + b soll multiplicieret werden, so lasse den Factor, welcher das Negativzeichen vor sich hat, für den Multiplicandus gelten, welches man allzeit thun kann (§. 24.), und den Factor der + vor sich hat, für den Multiplicanten; so ist es klar, daß in dem Producte der Abgang des Multiplicandus nämlich — a so oft müsse gesetzt werden, als es der Multiplicans nämlich + b andeutet, also muß das Product negativ, nämlich — b seyn; das ist, wenn die Zeichen vor den Factorn verschieden sind, ist das Zeichen vor dem Producte negativ.

Nachdem wir gesehen haben daß $-a \times +b = -ab$ sey, ist es klar, daß $-a \times -b$ nicht könne zum Producte $-ab$ geben, sonst könnte man in der Multiplication $-b$ für $+b$ substituieren, welches doch sich nicht thun läßt; also kann $-a \times -b$ nur $+ab$ im Producte geben: denn es muß ja, wenn ich $-a$ mit $-b$ multipliciere, der Factor $-a$ in dem Producte so oft enthalten seyn, als der andere Factor $-b$ Eins in sich enthält (§. 23.): es steckt aber nicht die positive Einheit $+1$, sondern das Gegentheil -1 in einem negativen Factor; also muß auch des andern negativen Factors Gegentheil, das ist + im Producte stehen.

In einem besondern Beyspiele läßt sich die Wahrheit dieser letzten Regel klärer zeigen. Setzen wir, es soll -4 mit $5-3$ multiplicieret werden, so muß ich in dem Producte den Abgang von 4, so oft setzen, so oft Eins in $5-3$ enthalten ist, nämlich zweymal (§. 23.): nun aber wenn ich -4 zuerst mit $+5$ multipliciere, und -20 zum Producte erhalte, so wird der Abgang von 4 in diesem Producte fünfmal gesetzt, das ist, dreymal öfter als es seyn sollte, wenn man -4 mit $5-3$ multiplicieret, also müssen wir diesen Abgang wieder dreymal ersetzen, und 3×4, das ist, 12 ad-

dieren, damit wir das wahre Product $-20+12=-8=-4\times 2$ erhalten.

3. §. 63. Weil der Quotient, wenn man das Product durch einen Factor dividieret, der andere Factor ist (§. 34.); so ist

1. $+ab:+a=+b$	5. $+ab:-a=-b$
2. $+ab:+b=+a$	6. $+ab:-b=-a$
3. $-ab:-a=+b$	7. $-ab:+a=-b$
4. $-ab:-b=+a$	8. $-ab:+b=-a$

das ist: auch in der Division, wenn die Zeichen vor dem Dividendus und dem Divisor einerley sind, hat der Quotient + vor sich; wenn sie aber verschieden sind, hat er — vor sich.

4. §. 64. Größen von mehr Theilen mit den nämlichen oder verschiedenen Zeichen multiplicieren.

a. 1. Was die Mitfactoren, wenn diese Zahlen sind, die vor den Buchstaben stehen, belangt, geschieht die Multiplication wie bey andern Zahlen, die Buchstaben aber des Multiplicanten und Multiplicandus werden nebeneinander hingesetzt.

2. Das Zeichen vor dem Producte ist +, wenn die Factoren einerley haben, — aber, wenn sie verschiedene haben (§. 62.).

z. B. Es sey der Multiplicandus $3a-2b+4c$
der Multiplicans $+2a$

$$6aa-4ab+8ac$$

z. B. Es sey der Multiplicandus $3a-2b+4c$
der Multiplicans $2a-3b$

so sind die partiäle Producte $\begin{cases} 6aa-4ab+8ac \\ -9ab+6bb-12bc \end{cases}$

das ganze Product $6aa-13ab+8ac+6bb-12bc$

5. §. 65. Größen die mehr Theile haben mit den nämlichen oder verschiedenen Zeichen dividieren.

Die

Die Division geschieht wie in den Zahlen, nur muß man den oben §. 63. angeführten Zusatz beständig vor Augen haben, doch ist dieser Unterschied, daß die Buchstaben nicht wie Zahlen ihren Werth von ihrer Stelle haben: aber um Verwirrung zu vermeiden, ist es nützlich, daß man die Theile sowohl des Divisors als des Dividendus, und alle Buchstaben in den Theilen, soviel es sich thun läßt nach dem Alphabet ordne.

z. B. Es sey der Dividendus bbb + aaa + 3bba + ab, und der Divisor b + a: so mag man sie in folgender Ordnung ansetzen, und darnach dividieren.

Dividendus	aaa + 3aab + 3abb + bbb	(aa + 2ab + bb
Divisor	a + b	Quotient.
erstes Product	aaa + aab	
Rest	2aab + 3abb + bbb	
zweytes Product	2aab + 2abb	
Rest	aab + bbb	
drittes Product	aab + bbb	
Rest	0	

Es ist nämlich das erste Product (a + b) X aa; das zweyte (a + b) X 2ab; das dritte (a + b) X bb.

Wiederum, es sey der Dividendus	aa—bb—ac+bc	(a+b—c
der Divisor	a—b	Quotient
erstes Product	aa—ab	
Rest	ab—bb—ac+bc	
zweytes Product	ab—bb	
Rest	—ac+bc	
drittes Product	—ac+bc	
	0	

Wiederum, es sey der Dividendus	aa—bb+c	(a—b Quo-
der Divisor	a+b	tient.
erstes Product	aa + ab	
Rest	—ab—bb+c	
zweytes Product	—ab—bb	
Rest	+c	

Dieser

Dieser letzte Rest läßt sich durch a+b nicht theilen, ausgenommen durch eine unendliche Reihe, so mag man ihn also zuletzt an den Quotienten, mit dem Divisor darunter, als einen Bruch hinsetzen, also: $a - b + \frac{c}{a+b}$.

IV. Von den gemeinen vier Rechnungsarten mit Fractionen oder Brüchen.

E. §. 66. Man drücket die Brüche durch Zahlen aus, die übereinander geschrieben werden mit einem dazwischen gemachten Striche: die unter dem Striche stehet, heißt der Nenner (denominator), und deutet an, in wie viel Theile die Einheit getheilet sey; die ober dem Striche heißt der Zähler (numerator), und deutet an, wie viel solche Theile der Bruch gelte.

z. B. $\frac{2}{3}$ heißt die Einheit sey in 3 Theile getheilet, und zwey davon soll man nehmen. $\frac{a}{b}$ bedeutet den Quotienten, welcher entsteht, wenn man a mit b dividiert.

Z. §. 67. Wenn also zween Brüche den nämlichen Nenner haben, so ist jener größer, der einen größern Zähler hat, und um so viel größer, als dieser Zähler größer ist als des andern seiner: denn die Nenner mag man nur als die Nämen der gebrochenen Größen ansehen.

z. B. $\frac{4}{10}$ ist noch so groß als $\frac{2}{10}$, weil 4 noch so groß ist als 2.

Z. §. 68. Wenn zween Brüche den nämlichen Zähler oder verschiedene Nenner haben, so ist jener größer, der einen kleinern Nenner hat, und um so viel größer, als dieser Nenner kleiner ist, als des andern seiner: denn wenn man eine Einheit in gleiche

Theile

Theile zertheilet, werden die Theile so viel kleiner, als mehr sie sind.

z. B. $\frac{2}{5}$ ist noch so groß als $\frac{2}{10}$, denn jede Theile sind noch so groß, wenn eine Einheit nur in 5, als wenn sie in 10 Theile getheilet wird; so ist der fünfte Theil eines Guldens = 12 kr. der zehnte nur = 6 kr.

§. 69. Darum ist es ein Ding, wenn man den 3. Zähler eines Bruches mit einer gegebenen Zahl multiplicieret, oder den Nenner mit derselben dividieret, der Bruch wird auf eine Art so viel als auf die andere dadurch vermehret.

z. B. Es sey gegeben der Bruch $\frac{3}{8}$ wenn ich seinen Zähler mit 2 multipliciere so erhalte ich $\frac{6}{8}$, welches noch so viel ist als $\frac{3}{8}$ (§. 67.): wenn ich aber den Nenner 8 mit 2 dividiere, so werden $\frac{3}{4}$ daraus, und auch dieser Bruch ist noch so groß, als der gegebene $\frac{3}{8}$ (§. 68.).

§. 70. Eben so mag man den Zähler eines 3. Bruches mit einer gegebenen Zahl dividieren, oder seinen Nenner damit multiplicieren, so wird der gegebene Bruch dadurch gleich viel vermindert.

z. B. Wenn man den Zähler 3 des Bruches $\frac{3}{4}$ mit 3 dividieret, erhält man $\frac{1}{4}$, welcher Bruch der dritte Theil des vorigen ist (§. 67.): wenn man aber den Nenner 4 des Bruches $\frac{3}{4}$ mit 3 multiplicieret, bekömmt man $\frac{3}{12}$, welches ebenfalls der dritte Theil von $\frac{3}{4}$ ist, weil 4 in 12 dreymal enthalten ist. (§. 68.)

§. 71. Es wird also ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliciert, wenn man entweder seinen Nenner damit dividiert (wenn er sich je völlig damit ohne 3.

Reste dividieren läßt), oder den Zähler damit multiplicieret.

z. B. Man soll $\frac{3}{12}$ multiplicieren mit 3, so kann man den Nenner 12 mit 3 dividieren, und man erhält $\frac{3}{4}$, welches eben so viel ist als $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{12} \times 3$. Also $\frac{3}{4}$ von einem Gulden ist 3×15 kr. $= 45$ kr. und $\frac{9}{12}$ davon ist $= 9 \times 5$ kr. $= 45$ kr. Eben so, wenn man $\frac{a}{bc}$ mit c multiplicieren soll, wird das Produkt $\frac{a}{b}$, und $\frac{ac}{bc}$ das nämliche seyn, und $\frac{a}{b} \times b$ ist $= \frac{ab}{b} = a$.

Z. §. 72. Und umgekehrt, ein jeder Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiret, wenn man entweder seinen Zähler (wenn es je ohne Reste angeht) damit dividieret, oder den Nenner damit multiplicieret.

z. B. Man soll $\frac{3}{4}$ durch 3 dividieren, so ist der Quotient $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{12}$, eines dieser zweyen gilt so viel als das andere. Soll ich $\frac{3}{5}$ mit 4 dividieren, so ist der Quotient $\frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$; denn, wenn ich den Zähler mit einer gegebenen Zahl nicht genau ohne Reste dividieren kann, so muß ich nothwendig meine Zuflucht zur Multiplication des Nenners nehmen. Eben so wenn $\frac{a}{b}$ soll mit c dividieret werden, so ist der Quotient $\frac{a}{bc}$.

Z. §. 73. So oft man also immer einen Buchstaben aus dem Nenner eines Bruches wegnimmt, so multiplicieret man mit ihm den gegebenen Bruch; wenn man aber einen Buchstaben aus dem Zähler auslöschet, so wird der Bruch damit dividieret.

§. 74. Wenn man sowohl den Nenner als L.
den Zähler eines Bruches mit der nämlichen Zahl,
oder nämlichen Größe multiplicieret, oder damit
dividieret, wächst dadurch der Bruch nicht, und
nimmt auch nicht ab, sondern bleibt unverändert.

z. B. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ und $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

Denn so viel ein Bruch durch die Multiplication B.
des Zählers mit einer gegebenen Größe vermehret
wird (§. 67.), so viel wird er wieder durch die
Multiplication des Nenners mit selber Größe ver-
mindert. (§. 68.)

Und so viel ein Bruch durch die Division des Zäh-
lers mit einer gegebenen Größe vermindert wird
(§. 70.) eben so viel wird er durch die Division
des Nenners mit selber vermehret (§. 69.) also
wird der Bruch auf solche Weise weder vermehret
noch vermindert, sondern er bleibt unverändert.
Dieses ist der Grund der Auflösung folgender Auf-
gabe.

§. 75. Einen gegebenen Bruch, wenn es A.
möglich ist mit kleineren Zahlen auszudrücken.

Sehet ob sich nicht so wohl der Nenner als Zäh- a.
ler des gegebenen Bruches mit einer nämlichen Zahl
ohne Reste dividieren lasse; wenn dieses angeht, so
thut es, und der Bruch ist auf kleinere Zahlen ge-
bracht.

Wenn der Bruch mit Buchstaben gegeben ist,
und ein Buchstab sowohl im Nenner als Zähler
der nämliche vorkömmt, streiche man ihn beyderseits
aus, so ist der Bruch einfacher ausgedrücket.

z. B.

z. B. Es sey gegeben der Bruch $\frac{6}{8}$, so ist $6 : 2 = 3$, und $8 : 2 = 4$ folglich $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Eben so aus $\frac{30}{42}$ wird $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ und aus $\frac{ab}{ac}$ wird $\frac{b}{c}$ aus $\frac{abcd}{abce}$ wird $\frac{d}{e}$.

A. §. 76. Zweene oder mehrere Brüche auf den nämlichen Nenner zu bringen.

a. 1. Wenn der Nenner eines der gegebnen Brüche sich durch den Nenner des andern ohne Reste dividieren läßt, so bemerket den daraus entspringenden Quotienten, mit diesem multiplicieret so wohl den Nenner als Zähler des Bruches, der einen kleinern Nenner hat, so ist der neue Bruch dem vorigen gleich, und beyde haben den nämlichen Nenner.

z. B. Es seyn gegeben $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$, man sieht wohl, daß 4 in 8 zweymal enthalten sey, also multipliciere den Nenner und Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ mit 2, und ihr bekömmt $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (§. 74.) und beyde Brüche $\frac{6}{8}$ und $\frac{5}{8}$ haben den nämlichen Nenner.

Bißweilen läßt sich sowohl der Nenner als Zähler eines Bruches, der den größern Nenner hat, genau mit dem Quotienten dividieren, welcher andeutet, wie oft der kleinere Nenner im größern enthalten ist, in solchen Falle nehme man diese Division vor, so bringt man zugleich den Bruch von größern Zahlen, auf kleinere, und zugleich auf den nämlichen Nenner den der andere hat.

z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{8} = \frac{3}{4}$ und $\frac{2}{4}$

2. Wenn

2. Wenn aber der Nenner eines der gegebenen Brüche sich durch den Nenner eines andern nicht ohne Reste dividieren läßt, und der Brüche nur zweene sind, so multipliciere man so wohl den Nenner als den Zähler eines jeden mit dem Nenner des andern; wenn sie aber mehr als zweene sind, mit dem Producte aus den Nennern der andern.

z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ sollen unter gleiche Nenner gebracht werden, so multiplicire sowohl den Zähler 1 als den Nenner 2 des ersten Bruches mit dem Nenner 3 des andern, und du erhältst $\frac{3}{6}$ für $\frac{1}{2}$; darnach multiplicire sowohl den Zähler 2, als den Nenner 3 des zweyten Bruches $\frac{2}{3}$ mit 2 den Nenner des ersten, und du erhältst $\frac{4}{6}$ an statt zwey Drittel: also sind sie unter einer nämlichen Benennung, nämlich $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$

Sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ unter eine Benennung kommen, so multipliciere die Nenner und Zähler des ersten Bruches mit $3 \times 5 = 15$, des zweyten mit $2 \times 5 = 10$, des dritten mit $2 \times 3 = 6$. 1 und du erhältst dafür $\frac{15}{30}$, $\frac{20}{30}$ und $\frac{24}{30}$.

Aus $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{a}$ werden $\frac{ad}{ba}$ und $\frac{bc}{ba}$.

Aus $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{a}$ und $\frac{e}{f}$ werden $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{baf}$, und $\frac{bde}{bdf}$

§. 77. Brüche zu addieren. A.

1. Man bringe sie auf den nämlichen Nenner a. (§. 76.) 2. addieret alsdann die neuen Zähler, und schreibt

schreibt den neuen gemeinschaftlichen Nenner darunter.

z. B. Man soll addieren $\frac{2}{5} + \frac{4}{7}$, so werden daraus $\frac{14}{35} + \frac{20}{35}$ und ihre Summe $\frac{34}{35}$. Eben so aus $\frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{1}{9}$ werden $\frac{144}{504} + \frac{189}{504} + \frac{56}{504} = \frac{389}{504}$ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ist $= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Und $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ ist $= \frac{adf+bcf+bde}{bdf}$.

E. §. 78. Wenn man mehrere Brüche zusammen in eine Summe addieret, geschieht es nicht selten, daß die Summe des Zählers dem Nenner gleich, oder gar größer wird, als er ist, daß also in einem solchen Bruche eine ganze Einheit, oder mehr derselben enthalten sind; einen solchen Bruch, dessen Nenner nämlich größer ist als der Zähler, oder der ein ganzes oder mehr als ein ganzes enthält, nennet man einen unächten Bruch, die aber, derer Nenner kleiner sind als die Zähler, sind ächte Brüche.

z. B. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12}$

Wiedrum $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = \frac{64+72+84}{96} = \frac{220}{96} = 2 + \frac{28}{96} = 2 + \frac{7}{14}$.

Also auch $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$; und $\frac{2a+b}{a} = 2 + \frac{b}{a}$ sind unächte Brüche.

A. §. 79. Jede ganze Zahl in einen unächten Bruch von einem gegebenen Nenner zu verwandeln.

Mul-

Multiplicieret die gegebene ganze Zahl durch den gegebnen Nenner, und eben diesen schreibet unter das Product, so ist geschehen, was man verlangte. a.

z. B. Man will die ganze Zahl 2 in einen unächten Bruch mit dem Nenner 3 verwandeln, so macht man daraus $\frac{2.3}{3} = \frac{6}{3}$. Eben so wenn man 2 soll in einen unächten Bruch, dessen Nenner 3 a sey, verwandeln, so bekömmt man $\frac{6a}{3a}$, und eben so aus 2 b wird $\frac{6ba}{3a}$

§. 80. Einen Bruch von einem größern, oder von einer ganzen Zahl, oder der Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche abziehen. n.

1. Bringet beyde Brüche auf den nämlichen Nenner, und ziehet den kleinern Zähler von dem größern ab; der Rest dieses Zählers mit darunter geschriebenem nämlichen Nenner ist die Differenz. a.

2. Wenn der Bruch von einer ganzen Zahl soll abgezogen werden, so vermindert die gegebne Zahl um Eins, und diese entlehnte Einheit verwandelt in einen unächten Bruch mit dem nämlichen Nenner, den der Bruch hat, den man abziehen will, und darnach zieht diesen davon ab.

3. Wenn der Bruch von der Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche soll abgezogen werden, der kleiner ist als der Bruch, den man abziehen soll, so entlehnt aus der ganzen Zahl eine Einheit, und diese so wohl als den anhangenden kleinern Bruch verwandelt in Brüche, die den nämlichen Nenner haben mit dem, den man abziehen will, so kann mit ihrer Summe die Subtraction wie n. 1 vorgenommen werden.

z. B.

z. B. I. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ ist $= \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$

II. $3 - \frac{2}{3}$ ist $= 2 + \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

III. $3 + \frac{1}{4} - \frac{2}{5}$ ist $= 3 + \frac{5}{20} - \frac{8}{20} = 2 + \frac{20}{20} + \frac{5}{20} - \frac{8}{20} = 2 + \frac{25-8}{20} = 2 + \frac{17}{20}$

Mit Buchstaben ist $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$.

E. §. 81. Einen gegebenen Bruch A mit einem andern B multiplicieren, heißt so viel als den Bruch A mit dem Nenner des Bruches B dividieren, und den Theil des Bruches A, den der Quotient andeutet, so viel mal nehmen, als der Bruch B Eins in seinem Zähler enthält.

z. B. $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicieren ist so viel als den dritten Theil des Bruches $\frac{4}{5}$ zweymal nehmen.

Z. §. 82. Folglich, wenn ein Bruch A mit einem ächten B multiplicieret wird, wird er in der That getheilet und verkleinert. Denn weil der Nenner eines ächten Bruches größer ist, als sein Zähler (§. 78.) so wird der Bruch A mehr verkleinert, da er durch des Bruches B Nenner dividieret wird, als er dadurch zunimmt, daß man den daraus enstandenen Quotienten durch den Zähler des Bruches B multipliciert.

z. B. Wenn man $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicieret, so müßte man den dritten Theil des Bruches $\frac{4}{5}$, nämlich $\frac{4}{15}$ wieder dreymal nehmen, wenn man dadurch $\frac{4}{5}$ wieder herstellen

len wollte; also wenn man es nur zweymal nimmt, bleibt dieses Product nämlich $\frac{8}{15}$ kleiner als $\frac{4}{5}$ oder kleiner als $\frac{12}{15}$.

§. 83. Einen Bruch A mit einem Bruche B zu multiplicieren.

A. Multiplicieret so wohl die Nenner als die Zähler der gegebnen Brüche mit einander, so hat man das gesuchte Product.

z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. wiederum $1 + \frac{1}{3}$ oder $\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15}$ oder $\frac{4}{5} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{15}$ (§. 24.)

Mit Buchstaben ist $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ und $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$.

B. Denn wenn man den Bruch A mit dem Nenner des Bruches B multiplicieret, so theilt man ihn in so viele Theile als dieser Einheiten hat (§. 72): da man aber den Zähler des Bruches A mit dem Zähler des Bruches B multiplicieret, so nimmt man selben Theil als einen neuen Bruch so vielmal als der Zähler des Bruches B Einheiten einschließt (§. 71.): also wenn wir nach vorgeschriebner Art verfahren, multiplicieren wir den Bruch A mit dem Bruche B.

z. B. Wenn man $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ multiplicieret, so erhält man, da man die Nenner mit einander multiplicieret $\frac{2}{15}$, das ist den fünften Theil des Bruches $\frac{2}{3}$: da ich aber den Zähler 2

dieses Bruches mit 4 dem Zähler des andern multipliciere, muß das Product $\frac{8}{15}$ viermal größer seyn als $\frac{2}{15}$

§. 84. Wenn man mehr Brüche mit einander multiplicieret, und es sich ereignet, daß die nämliche größe so wohl unter ihren Nennern als Zählern vorkömmt, kann man sie beyderseits wegstreichen, weil jede Größe durch sich selbst dividieret Eins giebt. Wiederum wenn eine Größe A in einer andern B der vorkommenden ohne Reste enthalten ist, so kann man A ausstreichen und in die Stelle der andern B den Quotienten setzen, der entstanden ist, da man B mit A dividieret hat. Diese Weisen sind eine Verkürzerung der Reduction der Producte auf kleinere Zahlen (§. 75.) zum Beyspiel

man soll $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicieren, so machet es so: $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ wiederum wenn man soll $\frac{2}{3}$ mit $\frac{6}{7}$ multiplicieren, so habt ihr $\frac{2}{3} \times \frac{62}{7} = \frac{4}{7}$ denn weil sich 6 mit 3 vollkommen dividieren läßt, ohne daß ein Rest bleibt, kann man den Zähler 6, und zugleich den Nenner 3 ausstreichen, und in die Stelle des erstern 2 setzen.

Eben so $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{a} = \frac{c}{b}$ denn d, und a können beyderseits weggestrichen werden.

A. §. 85. Einen gegebnen Bruch A durch einen andern B zu dividieren.

a. Multiplicieret den Zähler des Bruches A, mit dem Nenner des Bruches B; und den Nenner des Bruches A mit dem Zähler des Bruches B, und setzet das letzte Product unter das erste, so ist die Division vollbracht.

e. g.

z. g. $\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 15} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Eben so ist $\frac{ac}{bd} : \frac{a}{b} = \frac{a\,b\,c}{a\,b\,d} = \frac{c}{d}$, und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{cb}$

Denn, wenn man so wohl die Zähler als Nenner 23.
eines jeden der gegebnen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit den Nennern des andern multiplicieret, so bringt man sie unter einen gemeinschaftlichen Nenner, und es sind die neuen Brüche $\frac{ad}{bd}$, und $\frac{cb}{bd}$ den vorigen gleich (§. 76.) folglich da der gemeinschaftliche Nenner b d gleichsam der Name der Sache, oder die Art der Einheiten ist, die die Zähler andeuten (§ 66) so muß der Divisor $\frac{c}{d}$ oder $\frac{cb}{bd}$, so oft in dem Dividendus $\frac{a}{b}$ oder $\frac{ad}{bd}$ stecken, so oft der Zähler des ersten c b in dem Zähler des andern a d enthalten ist, also muß der Quotient $\frac{ad}{cb}$ seyn (§. 66.), das ist, sein Zähler muß das Product aus dem Zähler des Dividendus a und dem Nenner des Divisors d; und sein Nenner muß das Product aus dem Zähler des Divisors b, und dem Nenner des Divisors c bestehen. Also erhält man jederzeit durch diese Producte den gesuchten Quotienten.

Zu einem besondern Beyspiele sey der Dividendus $\frac{3}{4}$ der Divisor $\frac{2}{5}$, wenn ich die Nenner und Zähler eines jeden mit dem Nenner des andern multipliciere, so bekomme ich dafür $\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$ und $\frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$ also ist $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{20} : \frac{8}{20}$.

$\frac{8}{20}$ oder weil der gemeinschaftliche Nenner 20 nur gleichsam die Art der Einheiten bestimmt $= \frac{15}{8} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2}$

§. 86. Auch hier sieht man, daß der oben § 34 angeführte Satz gelte: wenn ein Product mit einem Factor dividieret wird, so giebt der Quotient den andern Factor. Weil dann das Product, wenn ächte Brüche miteinander multiplicieret werden, kleiner wird als jeder Factor insonderheit, (§ 82) so muß auch in der Division eines Bruches durch einen ächten Bruch der Quotient größer seyn als der Dividendus. Das ist auch nicht zu bewundern, denn wir theilen hier nicht einen Bruch in kleinere Theile, sondern wir fragen nur, wie oft ein gegebner Bruch in einem andern enthalten sey: und derowegen ist der Quotient, der uns dieses andeutet, wenn der Divisor kleiner ist, als der Dividendus ein unächter Bruch, ein ächter aber, wenn er größer ist.

z. B. $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{9}{12} : \frac{8}{12} = \frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$ ist ein unächter Bruch.

aber $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = \frac{8}{9}$ ist ein ächter Bruch.

§. 87. Wenn man eine ganze Zahl mit einer gebrochenen dividieren soll, so gedenke man die ganze Zahl sey ein unächter Bruch, dessen Nenner Eins ist, so bleibt die vorige Regel. z. B. Es sey der Dividendus 4, der Divisor $\frac{2}{3}$, also $\frac{4}{1} : \frac{2}{3}$, so ist der Quotient $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$, das ist $\frac{2}{3}$ ist in 4 sechsmal enthalten.

E. §. 88. Ein Decimalbruch, ist der, dessen Nenner 1 ist mit einer oder mehreren Nullen.

z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1000}$

§. 89. **Willkühriges Gesetz.** Man schreibt die Decimalbrüche auszudrücken, nur ihre Zähler an, und so viele Nullen vor ihnen, als der Nenner hätte, weniger so viel als der Zähler Zahlen hat; und vor allen diesen, wenn es ein ächter Bruch ist, setzt man noch eine Nulle, welche aber durch ein Strichlein oder Düpflein von den nachfolgenden abgesönderet wird: ist aber der Bruch unächt, so kömmt die ganze Zahl, welche in dem unächten Bruche steckt, an statt dieser Nulle vor dem bemeldten Strichlein oder Düpflein zu stehen.

z. B. Man schreibt:

$\frac{3}{10}$ also 0,3 und $\frac{33}{10}$ oder $3 + \frac{3}{10}$ also 3,3

$\frac{3}{100}$ also 0,03 $\frac{323}{10}$ oder $32 + \frac{3}{10}$ also 32,3

$\frac{3}{1000}$ also 0,003 $\frac{203}{100}$ oder $32 + \frac{3}{100}$ also 32,03

$\frac{33}{1000}$ also 0,033

Wie aber ein jeder anderer Bruch in einen Decimalbruch könne verwandelt werden, wird unten §. 97. gelehret werden.

§. 90. Die Ziffer also in dem ersten Platze nach dem Strichlein oder Dupfen bedeutet die Zehendtheile, in dem zweyten Platze die Hunderttheile, die in dem dritten die Tausendtheile ꝛc. Vor dem Striche oder Puncte aber bedeuten die Ziffern in der letzten Stelle Einheiten, in der vorletzten hunderte ꝛc. Also wächst der Werth der Ziffern von der rechten zur linken Seite, und von der linken zur rechten nimmt er ab, also, daß jede Zahl in der nächst vorangehenden Stelle zehnmal so viel als in der nächst folgenden gilt, wie sonst der Werth der Ziffern bey 3.

gemeinen Zahlen (§. 7). Und also wird das Addieren und Subtrahieren mit den Decimalbrüchen, wie mit andern Zahlen vorgenommen. Nur das ist wohl zu merken, daß man immer die Ziffern von einer Art genau unter einander schreiben muß, nämlich die Ziffern, welche Zehendtheile bedeuten, unter die, welche eben solche andeuten, die Hunderttheile unter die Hunderttheile. Man muß derowegen um Verwirrung zu vermeiden so wohl beym Subtrahieren als Addieren an die letzte Ziffer des Bruches, der weniger Stellen hat, so viele Nullen hinsetzen, als viel er weniger Stellen er hat; wollte man aber an beyde noch mehrere Nullen anhängen, so würde dieses nichts nützen, weil sie den Werth der vorangehenden Zahlen weder vermehren noch vermindern würden. (§. 74.)

z. B. 0, 3 ist eben so viel als 0, 30 oder 0, 300, denn 3 Zehendtheile gleichen 30 hunderttheilen oder 300 Tausendtheilen ꝛc. Nun setzen wir, es sollen diese zweene Brüche 0, 342 und 0, 0234 addieret werden, so geschieht

die Addition	0, 3420	die Subtraction	der Minuendus	0, 3654
also	0, 0234		Subtrahendus	0, 3420
Summe	0. 3654	also	Rest	0, 0234

3. §. 91. Es lassen sich auch ganze Zahlen, wenn man Nullen daran hängt in unächte Decimalbrüche verwandeln (§. 89.); derowegen kann man Decimalbrüche von ganzen Zahlen eben so, wie von andern Decimalbrüchen die größer sind, als die, welche man abziehen soll, subtrahieren.

z. B. Man soll 0, 003 von der ganzen Zahl 34 subtrahieren, so macht man es also:

34, 000
0 003
Rest 33, 997

Wem etwa, was jetzt folgt ein wenig zu schwer ist, mag es bis auf den §. 98. übergehen.

§. 92.

§. 92. Bey der Multiplication der Decimalbrüche, müssen so viele theils Ziffern theils Nullen nach dem Strichlein in dem Producte erscheinen, als in beyden Factoren nach selben da waren, doch die letzten Nullen läßt man weg. L.

z. B. Es seyn die Factoren 0, 3 und 0, 24, so ist das Product 0, 072 wieder 0, 45 X 2. = 0, 90 oder 0, 9. 0, 45 X 20 = 9, 00 oder 9

Denn zweene Decimalbrüche z. B. 0, 3 und 0, 24, die man nach gemeiner Art also schreiben würde $\frac{3}{10}$ und $\frac{24}{100}$, gäben, wenn sie mit einander multiplicieret würden, ein Product mit so viel Nullen nach dem Striche in dem Nenner, als theils Ziffern theils Nullen in beyden nach dem Striche vorkommen, es wäre nämlich nach obigen das Product $\frac{72}{1000}$ (§. 32 und § 83): Nun so viele Nullen in dem Nenner dieses Products sich einfinden, so viele theils Ziffern theils Nullen müssen nach dem Strichlein kommen (außer daß man die letzten wegläßt) wenn man dieses Product nach Art der Decimalbrüchen ausdrücket §. 89): also müssen in dem Producte so viele theils Ziffer theils Nullen nach dem Strichlein erscheinen, als in beyden Factoren da waren; außer daß man die letzten weg läßt. B.

§. 93. Folglich ist bey der Division der Decimalbrüche, die Zahl der Ziffern und Nullen nach dem Strichlein in dem Quotienten dem Unterschiede zwischen der Zahl der Ziffern und Nullen nach dem Strichlein des Divisors und des Dividendus gleich. (§. 34.) Z.

z. B. 0, 072 : 0, 3 = 0, 24

A. §. 94. Einen Decimalbruch durch einen andern zu multiplicieren.

a. 1. Man verrichte die Multiplication wie in ganzen Zahlen.

2. Man bestimme den Ort des Strichleins, und erfülle die Zahl der theils Ziffern theils Nullen, die nach dem Strichlein in dem Producte seyn müssen (§. 92) mit vorangesetzten Nullen, nebst dem o vor dem Strichlein, die Nullen aber die zu Ende des Products nach dem Strichlein kommen, lasse man weg.

z. B. Es seyn die Factoren o, o3 und o, o2, so ist das Product o, oooo6

Wieder 3,3 X o,24 = o,792. 3,2 X 3,3 = 10,56
3 X o,2 = o,6 30 X o,2 = 6,o = 6
300 X o,2 = 60,o = 60.
3000 X o,2 = 600,o = 600
3000 X o,ooo2 = 6,ooo = 6

A. §. 95. Einen Decimalbruch durch einen andern dividieren.

a. 1. Man verrichte die Division wie in ganzen Zahlen

2. Darnach bestimme man den Ort des Strichleins nach der §. 93. gegebnen Regel; so ist alles richtig.

z. B. Man soll o, o72 durch o, 24 dividieren; wenn man 72 mit 24 dividieret, ist der Quotient 3, im Dividendus sind 3 Ziffern wenn man die Nulle auch mitrechnet nach dem Strichlen, in dem Divisor aber nur zwo, also ist der Unterschied 1: folglich ist in dem Quotienten nur eine Ziffer nach dem Strichlein zu setzen, und wir haben zum Quotienten o, 3

Eben so o, 792 : o, 24 = 3, 3 o, 72 : o, 24 = 3,
o, 44 : 2 = o, 22 o, 44 : 20 = o, o2

denn die Nulle vor dem Striche in dem Divisor 20, hat man als einen Abgang einer Nulle nach selbem anzusehen.

3. Wenn

3. Wenn man aber die Division nicht einmal anfangen kann, weil der Dividendus weniger Ziffern oder eine kleinere hat als der Divisor, so setze man dem Dividendus Nullen bey, die doch seinen Werth nicht ändern (§. 90.), und sodann dividiere man.

z. B. Es sey der Dividendus 0,03, der Divisor 0, 15; setzen wir zum Dividendus eine Nulle, daß er 0, 030 sey, so können wir ihn mit 15 dividieren, und der Quotient ist 0,2. Eben so 0,3 : 0, 15 = 0, 30 : 0, 15 = 2. 0, 72 : 2, 4 = 0, 3.

§. 96. Manchmal wird es sich ereignen, daß sich der Dividendus, ohne daß man ihm Nullen anhängt, mit dem gegebnen Divisor ohne Reste nicht theilen lasse, und da helfe man sich mit einer oder mehr angehängten Nullen. z. B. 0, 09 : 0,2 giebt keinen vollkommenen Quotienten, denn 4 ist zu klein und 5 zu groß; aber wenn man den Dividendus mit einer Nulle vermehrt und 0, 090 daraus macht, läßt er sich mit 0, 2 genau ohne Reste dividieren, und giebt 0, 45 zum Quotienten. Eben so ist 0, 9 : 2 = 0, 45, und 0, 9 : 0,2 = 4,5. 0, 3 : 0, 4 = 0, 300 : 0, 4 = 0, 75

Es kann eben auch geschehen, daß obwohl man Nullen an den Dividendus anhängt, so viel man will, sich doch kein genauer Quotient ergiebt, in solchem Falle kann sich dem wahren Quotienten durch eine Reihe Zahlen, die man so lang machen kann, als man will, immer mehr und mehr näheren, je länger man nämlich diese Reihe macht.

z. B. 0, 2 : 0, 03 = 6, 666 ꝛc. unendlich fort.

§. 97. Wenn ein gemeiner Bruch z. B. $\frac{1}{2}$ 3. oder 1 : 2 gegeben wird, und man nur den Zähler nach Art eines Decimalbruches ausdrücket, erhält man 1, 0, und also ist $\frac{1}{2}$ = 1, 0 : 2. Folglich kann man jeden gemeinen Bruch in einen Decimalen verändern, wenn man seinem Zähler so viele Nullen anhängt, als man Decimalziffer haben will, und ihn also vermehret mit dem Nenner dividieret, denn so erhält man, wenn die Division genau geschehen kann, einen

Decimalbruch, der dem gegebnen gemeinen gleich ist, oder wenn immer ein Rest bleibt, kann man sich doch dem wahren Werthe desselben, so viel man will, nähern. Es ist aber zu merken, daß wenn einmal die nämliche Zahl im Reste vorkömmt, sich darnach auch die nämlichen Ziffern wieder in dem Quotienten stellen, und so weiß man die unendliche Reihe ohne weiter zu rechnen.

z. B. $\frac{1}{2} = 1,0 : 2, = 0,5$. $\frac{3}{4} = 0,75$ diese Quotienten sind genau: aber $\frac{1}{3} = 20,333$ ꝛc. unendlich fort, und eben so $\frac{6}{7} = 0,857142857142$ ꝛc. sind nur mit unendlichen Reihen auszudrücken.

V. Von den Potenzen und wie man die Wurzeln ausziehet.

E. §. 98. Wenn man eine Größe mit sich selbst multiplicieret, so heißt das daraus entstandene Product ein Quadrat, die Größe aber daraus selbes entstanden ist, seine Wurzel oder die Quadratwurzel davon.

z. B. $2 \times 2 = 4$: 4 ist das Quadrat der Wurzel 2. $a \times a = aa$: aa ist das Quadrat von a. $ab \times ab = aabb$ ist das Quadrat von ab.

E. §. 99. Wenn man das Quadrat wieder mit seiner Wurzel multiplicieret, so heißt das daraus erwachsene Product der Kubus oder die Kubikzahl und die Wurzel, daraus der Kubus entstanden ist, heißt seine Kubikwurzel. Man nennet auch die Wurzel die erste Dignität oder erste Potenz, das Quadrat die zweyte, den Kubus die dritte. Wenn man

man den Kubus wieder mit der Wurzel multiplicirt, ist das neue Product die vierte Potenz u. s. w.

Es sey z. B. 2 die Wurzel oder erste Potenz, so ist 4 die zweyte, 8 die dritte, 16 die vierte, 32 die fünfte ꝛc.

Also auch von der Wurzel a ist aa die zweyte, aaa die dritte, aaaa die vierte, aaaaa die fünfte Potenz.

§. 100. **Willkührliches Gesetz.** Das Zeichen der Wurzel ist dieses $\surd$, setzt man keine Ziffer oder 2 mitten darauf, so bedeutet es die Quadratwurzel: sonst bedeutet die mitten darauf gesetzte Ziffer die Höhe der Potenz, deren Wurzel man dieses Zeichen voraus setzet. Steht aber diesem Zeichen ein Buchstab, so bedeutet er allgemein die Wurzel von was immer für einer gegebenen Potenz der Größe, vor der dieses Zeichen steht.

z. B. $\surd 4 = 2$ oder $\overset{2}{\surd} 4 = 2$ heißt die Quadratwurzel von 4 ist 2. $\overset{2}{\surd} 8 = 2$ die Kubikwurzel von 8 ist 2. $\surd aa = a$ die Quadratwurzel von aa ist a. An statt aa schreibt man gemeiniglich a^2, für aaa schreibt man a^3 ꝛc. $\overset{m}{a}$ heißt jede gegebne Dignität von a, und $\surd^m a$ jede Wurzel von a. $\overset{m}{\surd} a = a$ heißt: Man mag eine Größe a zu was immer für einer Dignität erheben, so ist sie selbst die Wurzel dieser Dignität von a

§. 101. Die Ziffer oder der Buchstab der ober dem Wurzelzeichen steht, heißt der **Exponent der Wurzel**; steht aber eine solche Ziffer oder solcher Buchstab rechterseits neben einem andern ober demselben, so heißt es der **Exponent der Dignität** oder **Potenz**, von der Größe, die der vorangehende Buchstab bedeutet.

z. B.

z. B. $\overset{3}{a}$, hier ist 3 der Exponent von der Größe a die zur dritten Potenz erhoben ist.

B. §. 102. Weil die Producte gleich sind, die aus gleichen Factoren entstehen (§. 49) so müssen auch die Potenzen vom nämlichen Exponenten gleich seyn, wenn ihre Wurzeln gleich sind; und wiederum wenn zwo Größen einander gleich sind, müssen auch ihre Wurzeln vom nämlichen Exponenten gleich seyn.

z. B. $5 = 2 + 3$, also ist auch $5^2 = (2+3)^2$

also auch wenn $a = b + c$, muß auch $a^2 = (b+c)^2$ seyn, und wenn $a^2 = (b+c)^2$ ist, so muß auch $a = b+c$ seyn.

E. §. 103. Die Wurzel der Potenz aus einer gegebenen Größe a ausziehen, heißt jene Größe finden, die zur gegebnen Potenz erhoben a giebt.

Also z. B. die Quadratwurzel von 4 finden, heißt jene Zahl finden, deren Quadrat 4 ist.

Z. §. 104. Dieweil, wenn ein Bruch mit dem andern multiplicieret wird, so wohl die Nenner als Zähler miteinander multiplicieret werden, so muß man so wohl den Nenner als den Zähler zur gegebnen Potenz erheben, wenn man einen Bruch dazu erheben soll, und eben darum, wenn man die Wurzel von was immer für einer Potenz aus einem Bruche ausziehen soll, so muß man sie so wohl aus dem Nenner als aus dem Zähler ausziehen.

z. B.

z. B. das Quatrat von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{4}{9}$, der Kubus davon $\frac{8}{27}$. das Quadrat von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{a^2}{b^2}$. der Kubus $\frac{a^3}{b^3}$

§. 105. Die zweyte und dritte Potenz der einfachen Zahlen zeiget gegenwärtige Tabelle:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Kubikzahlen	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 106. Weil in jedem Producte aus Factoren, die allein mit 1 und angehengten Nullen geschrieben werden, keine andere Ziffer als wieder 1 mit so vielen Nullen, als in den Factoren waren, erscheinet (§. 29.) so ist von 10 das Quadrat 100, der Kubus 1000, ꝛc. und also von 100 die Quadratwurzel 10, von 1000 die Kubikwurzel 10 ꝛc. und überhaupt bey jeder eine Zahl, die aus 1 mit angehengten Nullen besteht, findt man die Wurzel der Potenz, wenn man die Zahl der Nullen mit dem Exponenten der Potenz dividieret, (wenn er sich je genau dividieren läßt.) und so viele Nullen für die Wurzel behält als der gefundene Quotient Einheiten hat. 3.

z. B. die Quadratwurzel von 1000000 ist 1000, und die Kubikwurzel davon ist 100

§. 107. Es giebt viele Größen, aus denen man die Wurzel der Potenz von einem gegebenen Exponenten genau nicht ausziehen kann, weil nämlich diese Größen keine vollkommene Potenzen sind, oder wenigst nicht Potenzen von gegebenen Exponenten. Also z. B. giebt es keine Zahl, die zur dritten Potenz erhoben 4 macht: darum läßt sich auch aus 4 keine richtige Kubikwurzel ausziehen; doch kann 4.

man sie mit dem Wurzelzeichen also andeuten $\sqrt[3]{4}$.

Eben

Eben so giebt es keine genaue Wurzel von 3, aber man kann doch jeder Dignitätwurzel von 3 überhaupt also andeuten $\sqrt[m]{3}$. und so auch von a kann man keine Wurzel ausziehen, aber auch jede besonders z. B. die Kubikwurzel mit $\sqrt[3]{a}$, oder jede überhaupt durch $\sqrt[m]{a}$ anzeigen. Nun solche Wurzeln, die sich nur mit dem Wurzelzeichen andeuten, aber nicht ausziehen oder geben lassen als etwa durch unendliche Reihen größen, heißt man eine Irrationalwurzel; die man aber geben kann, heissen Rationalwurzeln.

Also z. B. $\sqrt[2]{4}$ ist rational, nämlich 2. aber $\sqrt[3]{4}$ ist irrational.

B. §. 108. Dieweil eine jede Wurzel mit sich selbst multiplicieret das Quadrat giebt, so ist $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, und eben so weil der Kubus entstehet, wenn man die Wurzel dreymal als Factor ansetzet, so ist $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a$, daß aber a die Quadratwurzel von a^2, und überhaupt $a = \sqrt[m]{a^m}$ sey, haben wir oben §§. 98. 99, und 100. gesehen.

E. §. 109. Eine zweygliedichte Wurzel (Radix Binomia) nennet man die, welche aus zweenen Theilen, nämlich aus zwoen Ziffern, oder zweenen Buchstaben, die mit + oder — zusammen hangen, besteht. Eine dreygliedichte (Trinomia) die aus dreyen, eine viergliedichte (Quadrinomia) die aus vieren besteht.

z. B. a + b oder a — b. Wiederum 10 + 6 oder 16 sind zweygliedichte Wurzeln; aber a + b — c, und 10 + 40 + 6 oder 146 sind dreygliedichte Wurzeln.

§. 110.

§. 110. Das Quadrat einer zweygliedichten Wurzel besteht aus der Summe der Quadraten jedes Theils, und doppeltem Producte aus einem Theile in den andern.

Es seyn die zweygliedichten Wurzeln $a + b$, $a - b$, b, $-a-b$ und $-a+b$; erhebet jede zur zweyten Potenz (§. 641.) also:

$a+b$	$a-b$	$-a-b$	$-a+b$
$a+b$	$a-b$	$-a-b$	$-a+b$
$ab+b^2$	$-ab+b^2$	$+ab+b^2$	$-ab+b^2$
a^2+ab	a^2-ab	a^2+ab	a^2-ab
$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$	$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$

In allen diesen Producten sehen wir, daß die Quadrate beyder Theile $a^2 + b^2$, und $2ab$ das doppelte Product des ersten Theiles a in den andern b erscheine, auf mehrerley Art aber als diese 4 angesetzte können die Zeichen + und − vor den zween Buchstaben a und b nicht combiniret werden; denn haben sie einerley Zeichen, so haben entweder beyde + oder beyde − vor sich; haben sie aber verschiedene, so können nur $+a-b$, und $-a+b$ statt haben: also besteht immer das Quadrat der zweygliedichten Wurzel aus den bemeldten Theilen, und die Zeichen vor selben sind nur die hier vorgestellten.

§. 111. Wenn wir nun auf die Zeichen in diesen Formeln acht haben, so bemerken wir, daß jedes Quadrat zweyerley Wurzeln hat: nämlich $a^2 + 2ab + b^2$ kann eben so wohl aus der Wurzel $a + b$, als aus $-a-b$ entstehen; und eben so erwächst $a^2 - 2ab + b^2$ so wohl aus $a - b$, als aus

$-a$

$-a+b$. Aber auch a^2 allein entstehet so wohl aus $a \times a$ als aus $-a \times -a$ (§. 55 und §. 62) Es sey also die Wurzel ein oder mehr gliedig, so giebt eine positive und eine negative immer das nämliche positive Quadrat. Darum ist ein negatives Quadrat nicht möglich, und also auch seine Wurzel nicht: folglich bedeutet $\sqrt{-a}$ eine unmögliche Größe. Es heißt auch eine solche Wurzel radix imaginaria oder ein eingebildete Wurzel.

Z. §. 112. Zweytens wird man bemerken, I. daß, wenn die Zeichen in dem Quadrate wechseln, selbe auch in der Wurzel wechseln; wenn sie aber einerley sind in dem Quadrate, so wechseln sie auch in der Wurzel nicht, und umgekehrt. Und II. daß die Quadrate jeder Theile allezeit positiv seyn, nämlich $a^2 + b^2$: III. das doppelte Product aber aus dem ersten Theil in den andern nämlich $2ab$ wenn es vor sich $+$ hat, so seyen in der Wurzel die Zeichen einerley, nämlich $+$ und $+$ oder $-$ und $-$; wenn es aber vor sich $-$ hat, so seyen die Zeichen in der Wurzel verschieden, nämlich $+a--b$, oder $-a+b$.

Z. §. 113. Derowegen kann man, wenn das doppelte Product eines Theiles in den andern nebst dem Quadrate eines Theiles bekannt ist, leicht die ganze Wurzel finden: denn hat man einmal das Quadrat eines Theiles der Wurzel. z. B. a^2 so ziehe man daraus die Wurzel a, so ist diese der erste Theil der zweygliedichten Wurzel; wenn man darnach das doppelte Product eines Theiles in den andern nämlich $2ab$ mit dem verdoppelten ersten Theile nämlich mit $2a$ dividieret, so ist der Quotient der andere Theil b.

§. 114.

§. 114. Und derowegen ist es auch leicht ein z. unganzes Quadrat einer zweygliedigen Wurzel (in dem nämlich das Quadrat eines Theiles mangelt) zu ergänzen: denn, da man daraus den andern Theil (§. 113.) bestimmen kann, so erhebe man ihn zum Quadrate, und setze selbes dazu, damit man aus dem ganzen Quadrate der Wurzel ausziehen kann (§. 111.)

Es seyn zum Beyspiele gegeben $x^2 + 2ax$, so ist x die Wurzel von x^2 der erste Theil des zuergänzenden Quadrates, sodann verdoppelt ihn, und ihr habt $2x$, damit dividieret $2ax$, so ist der Quotient a, und eben dieser der andere Theil der zweygliedigen Wurzel; wenn ihr nun diesen zum Quadrate erhebet, und dieses Quadrat a^2, zum unganzen $x^2 + 2ax$ addieret, so habt ihr das ganze Quadrat $x^2 + 2ax + a^2$, und ihr findet seine Wurzeln $x + a$, und $-x-a$ (§. 111.) Sehet nun hier die Beyspiele verschiedener Fälle, die bey Ergänzung der unganzen Quadrate vorkommen können.

Es seyn also die unganzen Quadrate.	So ist der zweyte Theil der zweygliedichten Wurzel.	Was zur Ergänzung muß addieret werden.
$a^2 + 2ab$	$+ b$	$+ b^2$
$a^2 + ab$	$+ \frac{1}{2} b$	$+ \frac{1}{4} b^2$
$a^2 + 6ab$	$+ 3b$	$+ 9b^2$
$a^2 + ab$	$+ b$	$+ b^2$
6	12	144
$a^2 + mab$	$+ \frac{mb}{2}$	$+ \frac{m^2 b^2}{4}$
$a^2 + ab$	$+ \frac{b}{2} m$	$+ \frac{b^2}{4} m^2$
m	$+ \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{4}$
$a^2 - mab$	$- \frac{mb}{2}$	$+ \frac{m^2 b^2}{4}$
$a^2 - ab$	$- \frac{b}{2} m$	$+ \frac{b^2}{4} m^2$
m	$- \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{4}$
$a^2 + 2$	± 1	$+ 1$
2		

§. 115.

B. §. 115. Die allgemeine Formel des Quadrates der zweygliedigen Wurzel ist diese: $a^2 \pm 2ab + b^2$, darinnen das vor dem zweyten Theile 2ab stehende doppelte Zeichen ± bedeutet, daß bald + bald — in den sonderheitlichen Formeln vorkomme, nämlich das Quadrat der zweygliedichten Wurzel besteht jederzeit aus der Summe der Quadrate jeder Theile der Wurzel insonderheit mit vorangesetztem Positivzeichen, und aus dem doppelten Producte des ersten Theiles in den andern mit vorangehenden Positiv- und Negativzeichen; jenem nämlich wenn die Zeichen vor den Theilen der Wurzel einerley sind, den andern aber wenn sie verschieden sind (§. 112.)

B. §. 116. In dieser allgemeinen Formel des Quadrates der zweygliedichten Wurzel steckt auch die Formel der dreygliedichten, und jeder vielgliedichten Wurzel, denn es sey eine dreygliedichte Wurzel $\pm m \pm n \pm b$, so ist $\pm \frac{m+n}{m-n}$ in dieser sonderheitlichen Formel $= \pm a$ in der allgemeinen, und folglich $\pm 2ab = \pm 2bm \pm 2bn$, und $a^2 = m^2 \pm 2mn + n^2$: folglich ist die allgemeine Formel der dreygliedichten Wurzel $m^2 + n^2 + b^2 \pm 2bm \pm 2bn \pm 2mn$ oder $m^2 + n^2 + b^2 \pm 2b(m+n) \pm 2n \times m$. Und eben so könnten wir die Formel der viergliedichten Wurzel aus der Formel der dreygliedichten, und so immer die mehrgliedichte aus der nächst minder gliedichten herleiten, die wenn man sie miteinander vergleichet, wird man sehen, daß das Quadrat einer jeden mehrgliedichten Wurzel aus den Quadraten jeder Theile, und aus dem doppelten Producte jedes folgenden Theiles in alle vorangehende bestehe.

§. 117.

§. 117. Wenn wir die allgemeine Formel der zweygliedichten Wurzel mit Positivzeichen vor beyden Theilen auf Zahlen anwenden, und die erste Ziffer auf der linken Seite a, die andere alle miteinander b heissen, werden wir sehen, daß das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel, in den ersten Ziffern der Quadratzahl nach so viel paar Ziffern von der rechten zur linken, als Ziffern der ander Theil der die Wurzel hat, enthalten sey. 3.

z. B. Es sey die Wurzel 234, folglich a = 200 b = 34 (bestehet also der andere Theil aus 2 Ziffern)

a^2 =	40000
2ab =	13600
b^2 =	1156
Summe	54756

Wenn wir nun von der rechten zur linken in der Quadratzahl 54756 gehen, so kömmt erst hinter zwey paar Ziffern nämlich hinter 56, und 47 die erste Ziffer 5 welche hier 50000 gielt, und in dieser Zahl ist 40000 das Quadrat der ersten Zahl der Wurzel 200 enthalten.

§. 118. In keinem Producte ist die Zahl der Ziffern kleiner als die Zahl der Ziffern beyder Factoren weniger Eins; aber auch nicht größer als die ganze Zahl der Ziffern in beyden Factoren. 4.

z. B. Es sey der Multiplicandus 999, der Multiplicans 99, also in beyden Factoren 5 Ziffern; das Product 98901 hat doch nicht mehr als 5 Ziffern: wiederum sey der Multiplicandus 100, der Multiplicans 10; also sollen wieder beyde Factoren 5 Ziffern (die Nullen mitgerechnet), und das Product 1000 hat nicht weniger als vier.

Denn wenn wir den Multiplicandus mit dem Multiplicanten multiplicieren, erhalten wir jederzeit so viele Partialproducte, als dieser Ziffern hat, und eines jeden folgenden Partialproductes letzte Ziffer rucket um eine Stelle weiter linkerseits als die vorige, also in dem letzten Partialproducte ist seine letzte Zif- 5.

fer um so viele Stellen, als der Multiplicans Ziffern hat, weniger eine zurück getretten (§. 31.) weil dann in diesem letzten Producte nicht weniger Ziffern seyn können als in dem Multiplicandus, den es ein oder mehrmal in sich enthalten muß, so können in der Summe aller Partialproducte nicht weniger Ziffern seyn als in beyden Factoren weniger Eins, welches das erste war. Weil aber keine Zahl, die man mit einer einfachen multiplicieret, ein Product von mehr Ziffern giebt als eines über die Zahl der Ziffern im Multiplicandus, (§. 26. und §. 28.) und die letzte Ziffer, des letzten Partialproductes so viele Stellen links fortgerucket ist, als Ziffern im Multiplicanten sind weniger Eins, so kann die erste Ziffer dieses letzten Productes nicht weiter linkerseits zu stehen kommen als Ziffern in beyden Factoren sind. Nun diese Ziffer, welche allezeit kleiner als 9 ist (§. 105.) kömmt in der Summe aller Partialproducte in die erste Stelle entweder unverändert, oder nur um Eins vermehret, weil doch aus den folgenden Producten nicht mehr als Eins bis in diese Stelle zurück kommen kann. Also kann es sich niemal ereignen, daß in der Summe aller Partialproducte, in erste Ziffer um mehr Stellen zurücke stehe als Ziffern in beyden Factoren stehen. Und das war das andere.

Zur Erleuterung dieses Beweises können diese zwey Beyspiele dienen, das erste für den ersten, das zweyte für den zweyten Theil desselben.

III	999
II	99
III	8991
III	8991
1221	98901

3. §. 119. Also können in einer Quadratzahl als einem Producte aus der Wurzel in sich selbst als zween gleichen Factoren nicht mehr, dann noch so viel

viel Ziffern seyn als in der Wurzel, und auch nicht weniger, als eben diese Zahl ist, wenn man sie um Eins vermindert: folglich wenn man eine gegebne Quadratzahl von der rechten zur linken mit dazwischen gesetzten Strichlein in Klassen theilt, in derer jede zwey Ziffer kommen, (außer daß in der ersten linkerseits manchmal nur eine bleibet) bekömmt die Wurzel so viel Theile oder so viel Ziffern, als Klassen in der Quadratzahl, durch diese Theilung heraus kommen.

z. B. Das Quadrat 5, 47, 56 wird mit Strichlein nach dieser Regel in 3 Klassen getheilet, also hat auch die Wurzel 3 Theile.

§. 120. Und weil bey Erzeugung einer jeden Potenz die Wurzel so vielmal als Factor gesetzt wird, als Einheiten in dem Exponenten enthalten sind, so kann eine Potenz vom Exponenten m nicht aus mehr Theilen oder Ziffern bestehen, als das Product aus der Zahl der Theile der Wurzel mit dem Exponenten m multiplicieret, Einheiten enthält, und auch nicht weniger als diese Zahl, wenn man sie um Eins vermindert; folglich wenn man eine Zahl, die eine gegebne Potenz ist, von der rechten zur linken mit Strichlein in Klassen eintheilt, und jeder Klasse so viel Ziffern giebt, als der Exponent der gegebnen Potenz Einheiten hat, besteht die Wurzel aus so vielen Theilen, als Klassen durch diese Eintheilung sich ergeben. 3.

z. B. Weil der Exponent m der Kubikzahl 3 ist, so muß ich in einer Kubikzahl jeder Klasse 3 Ziffern geben, außer daß in der ersten weniger seyn können. Wenn ich also zum Beyspiele diese Kubikzahl 12, 812, 904 von der rechten zur linken in Klassen theile, erhalte ich drey Klassen, und schliesse daraus, daß die Kubikwurzel dieser Zahl aus drey Ziffern bestehe.

A. §. 121. Aus einer gegebnen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

1. Theilet die gegebne Zahl von der rechten zur linken in Klassen ein, und gebet jeder Klasse zwo Ziffern, außer daß in der ersten linkerseits nur eine überbleiben kann: denn so viel ihr Klassen bekömmt, so viele Theile hat die Wurzel (§. 119.)

2. Weil das Quadrat des ersten Theils oder der ersten Ziffer der Wurzel in der ersten Klasse der Quadratzahl enthalten seyn muß (§. 117.), so suchet in der §. 105. vorgestellten Tabelle das Quadrat auf, welches den Zahlen der ersten Klasse am nächsten kömmt, aber doch nicht größer ist als diese, und schreibt es darunter, und zieht es davon ab, die ihm zugehörige Wurzel aber setzet rechterseits neben dem Striche neben der Quadratzahl hin, wie man den Quotienten in der Division neben dem Dividendus hinschreibt.

3. Zu dem Reste, der nach der Abziehung geblieben ist, setzet die nächst folgende Klasse die bisher gefundene Theile der Wurzel aber verdoppelt, und schreibet des Productes letzte Ziffer unter die erste der folgenden Klasse, die übrigen aber, wenn es aus mehrern besteht, weiter fort zurücke gegen die linke, und dividieret damit als einem Divisor die darüber stehenden Zahlen, den Quotienten aber lasset unterdessen für den nächsten Theil der Wurzel gelten, und schreibet ihn so wohl neben den vorigen, als auch neben den Divisor unter die letzte Ziffer der neuen Klasse hin.

4. Die unter der neuen Klasse stehenden Zahlen multiplicieret mit eben diesem erst gefundenen Quotienten oder neuen Theile der Wurzel, und schreibet das Product darunter, und ziehet es von der neuen Klasse und dem vorangehenden Reste ab.

5. Wenn

5. Wenn man nun nach der dritten und vierten Regel bey allen übrigen Klassen verfährt, findt man endlich die ganze Wurzel. Man muß aber jederzeit zum Divisor nicht nur den verdoppelten letzten gefundnen Theil der Wurzel, oder die letzte Ziffer, sondern alle bisher gefundnen miteinander verdoppelt annehmen.

z. B. Es sey gegeben das Quadrat einer dreygliedichten Wurzel 54756. Sehet hier, wie man nach den gegebnen Regeln würklich verfährt, wir wollen aber den ersten Theil der Wurzel m, den andern n, beyde mit einander a, und den dritten b heissen, also:

$$\overbrace{\underbrace{m}_{}+\underbrace{n}_{}}^{a}+b$$

$(a+b)^2$	5, 4 7, 5 6	(2 3 4
m^2	4	
$(a+b)^2-m^2$	1 4 7 . .	
Divis. $2m)+n$	4 3 . .	Es ist $a^2 = m^2$
$2mn + n^2$	2 9 . .	$+2mn+n^2$
$(a+b)^2-a^2$	1 8 5 6	(§. 110.)
Divis. $2a)+b$	4 6 4	
$2ab+b^2$	1 8 5 6	

o

§. 122. Wenn man zwey Quadrate mit- L.
einander multiplicieret, so ist das Product wieder ein Quadrat: ja so viel man immer Potenzen von dem nämlichen Exponenten miteinander multiplicieret, so giebt das Product allezeit wieder eine Potenz von dem nämlichen Exponenten.

1. Denn man hat diese Quadrate als die Wur- B.
zel des daraus entstehenden anzusehen, es ist nämlich $a^2 b^2$ (§. 55.) $=$ aabb (§. 100.) $=$ a b $\times$ a b $=$ $(ab)^2$ (§. 102.) und also auch

$$a^m \times b^m = (a\,b)^m.$$

2. Ueberhaupt

§. 123.

Z. §. 123. Und also kann eine unvollkommene Quadratzahl (die nämlich zwar eine Quadratzahl in sich enthält, aber selbst keine ist) keine vollkommene Wurzel haben, sondern man hat sie anzusehen als ein Product aus einem Quadrate und einer Zahl die kein Quadrat ist, als Factorn. Derowegen kann man ein unvollkommenes Quadrat überhaupt durch $a^2 b$, und seine Wurzel durch $a \sqrt{b}$ ausdrücken.

z. B. $12 = 9 \times 1\frac{1}{3} = 3^2 \times 1\frac{1}{3}$ also $\sqrt{12} = 3\sqrt{1\frac{1}{3}}$.

Z. §. 124. Eben so wird eine unvollkommene Kubikzahl (die nämlich eine Kubikzahl in sich enthält, aber selbst keine ist) durch $a^3 b$ ausgedrückt, und ihre Wurzel durch $a \sqrt[3]{b}$. Eine vollkommene Kubikwurzel aber läßt sich daraus nicht ausziehen.

L. §. 125. Die ächten Brüche, wenn sie zu einer Potenz erhoben werden, werden desto kleiner, je höher die Potenz ist, zu der man sie erhält.

z. B. Es sey die Wurzel $\frac{1}{2}$, so ist das Quadrat $\frac{1}{4}$ der Kubus $\frac{1}{8}$

B. Denn wenn man einen Bruch zum Quadrate erhebt, wird er mit sich selbst multiplicieret, und immer wieder mit der Wurzel, wenn man ihn zu einer höhern Potenz erhebt; nun wird ein ächter Bruch allezeit kleiner, wenn er mit einem andern ächten oder mit sich selbst multiplicieret wird (§. 82.): also ist das Quadrat von einem ächten Bruche, wieder ein ächter Bruch und kleiner als die Wurzel, und jede höhere Dignität wird kleiner als die vorangehende, weil sie durch Multiplication der Wurzel in die

nächst

nächst niederere Potenz enstehet (§. 99.) und beyde Factoren also Brüche sind.

§. 126. Also kann ein ächter Bruch die Quadratwurzel einer ganzen Zahl oder die Wurzel was immer für einer höhern Potenz nicht seyn, ja so gar auch ein unächter Bruch der nicht einer ganzen Zahl gleichgültig ist, (§. 79.) kann nicht die Wurzel einer Potenz, die durch eine ganze Zahl ausgedrückt ist, seyn; denn die Summe aus einer ganzen Zahl mit einem ächten Bruche, wird niemal zu einer reinen ganzen Zahl, wenn sie zur höheren Potenz erhoben wird. 3.

§. 127. Folglich wenn eine ganze Zahl keine Wurzel hat, die sich genau durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, giebt es auch keine gebrochne, die sie völlig ausdrückt. (§. 123.) 3.

§. 128. Aus was immer für einer ächten oder unächten Decimalfraction die Quadratwurzel ausziehen. 4.

1. Wenn die Zahl der Ziffern nach dem Strichlein ungrad ist, so setzet eine Nulle dazu, daß sie gerad wird ohne daß ihr Werth verändert werde. (§. 90.) a.

2. Zieht alsdann die Quadratwurzel daraus, wie aus einer ganzen Zahl (§. 121.); und die Theile der Wurzel die sich aus den Ziffern vor dem Strichlein ergeben haben, bedeuten ganze Zahlen, die übrigen Decimaltheile der Wurzel.

z. B. Man soll die Quadratwurzel aus 0, 4 ausziehen: henge eine Nulle daran, so hast du 0, 40 und die Wurzel ist 0, 2 mit einem Reste von 6; denn die Zahl 0, 4 ist keine vollkommene Quadratzahl.

Wiederum es sey gegeben der unächte Bruch 4,4949 so ziehet man daraus die Wurzel 4,4 9 . 4 4 (2.1

also aus

4 . .	. .
4 9	. .
4 1	. .
8 4	4
4 2	2
8 4	4
	0

Wir haben nur zu erweisen, daß man die Zahl der Ziffern nach dem Strichlein gerade machen müsse, ehe man die Wurzel auszieht, und dieses beweisen wir also:

§. Wenn man aus einer Fraction die Wurzel ausziehen will, muß man sie so wohl aus dem Nenner als aus dem Zähler ausziehen (§. 104.): Nun der Nenner bey Decimalfractionen bestehet jederzeit aus 1 und so vielen Nullen, als darinnen nach dem Strichlein Ziffern vorkommen (§. 89). Diese Zahl aber, wenn man die Quadratwurzel daraus ziehen will, muß sich genau mit 2 theilen lassen (§. 106.), das ist, sie muß eine gerade Zahl seyn, ich muß sie also zu einer solchen machen, wenn sie es nicht ist, doch ohne den Werth des Bruches zu ändern; nun dieses geschieht, wenn man eine Nulle anhängt (§. 90), also muß eine Nulle angehengt werden, ehe man die Wurzel auszieht, da aber darnach bey Ausziehung der Wurzel nach dem Strichlein nur halb so viel Ziffern werden als zuvor, so wird eben darum die Zahl der in Gedanken darunter gesetzten Nullen halbieret, und ist es also so viel, als ob wir auch aus dem Nenner die Wurzel ausgezogen hätten.

z. B. $\sqrt{(0,4 = 0,40 = \frac{40}{100})}$ ist $= \frac{\sqrt{40}}{10} = \frac{6}{10}$ $= 0,6$ mit einem Reste der uns keine genaue Wurzel giebt (§. 127.)

§. 129. Eben so, obwohl man keine endliche Wurzel einer Zahl, die keine vollkommene Quadratzahl ist, geben kann, kann man doch sich derselben durch Decimalbrüche nähern, so viel man will, wenn man immer ein paar Nullen zum Reste setzet, und nach dem §. 122. vorgeschriebenen Regeln mit der Ausziehung der Wurzel fort fährt. z. B. wir wollen die Quadratwurzel von der Zahl 5 haben, die keine vollkommene Quadratzahl ist, sondern ein Product in dem die Quadratzahl von 2 nämlich 4 enthalten ist, welche davon abgezogen zum Reste 1 giebt, nämlich ein Product aus 4 und $1\frac{1}{4}$.

Willst du nun durch Decimalbrüche die Wurzel von 5 näher haben, so setze zum Reste 1 so viele paar Nullen, so viel du Decimalziffern über die schon gefundne unvollkommene Wurzel 2 zu erhalten verlangst. z. B. zwey als ob du die Wurzel aus 50000 ausziehen wolltest, und verfahre also:

```
5 . 00 00 00 ( 2,
4  .  .  .  .
-----------------
1  00 .  .
   42 .  .
   84 .  .
-----------------
   16 00
      4 4 3
   13 2 9
-----------------
Rest  2 7 1
```

§. 130. Willst du eine Prüfung vornehmen, ob du in Ausziehung der Wurzel nicht gefehlt hast, so erhebe die gefundne Wurzel zum Quadrate 48729 und setze den letzten Rest 271 dazu, so muß wieder, wenn du nicht gefehlt hast, die gegebne Zahl 5 mit so viel Nullen heraus kommen als du um die Wurzel genauer zu finden ihr angehengt hast, nämlich 50000

Kür-

Kürzer kann man folgende Prüfung vornehmen, setze zwo Linien also zusammen

1. Alsdann schreibe ober der Horizontalen den Rest aus der Wurzel mit weggeworfnen Neunern,

z. B. 2 + 2 + 3 = 7

2. Rechterseits der Verticallinie schreibe den Rest von der Summe aus dem Quadrate der Zahl, die du ober den horizontalen Strich geschrieben hast, und den letzten Rest, der bey Ausziehung der Wurzel geblieben ist, mit weggeworfnen Neunern, z. B. 7 X 7 = 49 bleiben 4, der letzte Rest war 71, daraus bleibt 1, also habe ich 5 rechterseits der Verticallinie zu schreiben.

7
5 | 5

3. Aus der gegebnen Zahl wirf auch die Neuner weg, wenn einige da sind, und den Rest schreibe linkerseits des verticalen Striches in diesem Exempel 5.

Wenn nun rechter und linkerseits des verticalen Striches die nämliche Zahl steht, so ist es ein sehr wahrscheinliches Zeichen daß nicht sey gefehlt worden, sind aber die Zahlen verschieden, so muß ein Fehler irgendwo eingeschlichen seyn.

L. §. 131. Der Kubus von einer positiven Wurzel ist positiv, und von einer negativen negativ.

B. Es sey die Wurzel + a, so ist das Quadrat + a^2 und der Kubus = $a^2 \times a = a^3$; folglich positiv. Nun sey die Wurzel — a, so ist doch das Quadrat + a^2 (§. 62.) und der Kubus + $a^2 \times -a = -a^3$ (§. 64.) also von der positiven Wurzel ist der Kubus positiv, von der negativen negativ.

L. §. 132. Der Kubus einer zweygliedichten Wurzel, deren beyde Theile positiv sind, ist die Summe aus dem Kubus jeder Theile insonderheit, und aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils durch den andern, und dreyfachen

fachen Quadrat des zweyten Theiles durch den ersten multiplicieret mit lauter Positivzeichen.

Denn es sey die zweygliedichte Wurzel $a + b$ B. so ist ihr Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ (§. 110.)
diese multipliciere mit der Wurzel $a + b$

Partial-	$a^2b + 2ab^2 + b^3$	
producte	$a^3 + 2a^2b + ab^2$	
Summe	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	der ganze Kubus.

Hier siehst du $a^3 + b^3$ die die Summe der Kuben beyder Theile; $3a^2b$, das ist drey Quadrate des ersten Theils durch den andern multiplicieret; und $3b^2$ oder drey Quadrate des zweyten Theils durch den ersten multiplicieret; und die Zeichen sind durchaus positiv.

§. 133. Aus einer gegebnen Zahl die Kubikwurzel auszuziehen. A.

1. Theile von der rechten gegen die linke mit dazwischen gesetzten Strichlein oder Düpflein die gegebne Zahl in Klassen jede von drey Ziffern; und die Wurzel wird so viel Theile haben, als Klassen die Kubikzahl hat. (§. 120.) a.

2. Suche in der Tabelle (§. 105.) den Kubus auf, der den Zahlen der ersten Klasse am nächsten kömmt, aber nicht größer ist als sie, diesen setze darunter und ziehe ihn davon ab, mit einem darunter gemachten Striche, unter den man den Rest setzet und die nächste Klasse dazu hin, die dazu gehörige Wurzel aber wird rechterseits neben der Kubikzahl nach einem Striche oder (hingeschrieben.

3. Un-

3. Unter das erste Ziffer der nächsten Klasse kömmt die letzte Ziffer des Restes zu stehen, die übrigen aber weiter linkerseits, es bestehet dieser Divisor immer aus dem dreyfachen Quadrate des schon gefundnen Theils (oder aller bisher schon gefundnen Theile) der Wurzel: nun mit diesem Divisor theile die ober ihm stehende Zahl, und der gefundne Quotient ist wieder ein Theil der Wurzel, wenn er je nicht zu groß ist, wie man bald darauf sehen wird.

4. Mit dem neuen erst gefundnen Theile der Wurzel multipliciere den Divisor, und schreibet das Product unter ihn.

5. Nun multipliciere den neuen Theil der Wurzel mit sich selbst, und dieses Quadrat mit 3, und dieses Product mit den vorangehenden Theilen der Wurzel: endlich schreibe die letzte Ziffer dieses letzten Productes unter die mittlere der neuen Klasse unter die vorige Zahlen.

6. Noch unter dieses Product, und unter der letzten Zahl der neuen Klasse schreibe die Kubikzahl des neuen Theils der Wurzel, die du in der Tabelle §. 105. findest.

7. Diese drey Producte, welche alle unter dem Divisor stehen, summiere zusammen, und wenn die Summe nicht zu groß ist, so ziehe sie von der neuen Klasse, und Reste aus der vorigen ab, sollte aber die Summe zu groß seyn, so müßte man den neuen Theil der Wurzel kleiner annehmen, und darauf wieder nach vorgeschriebner Weise fortfahren, doch würde er zu klein genommen seyn, wenn nach Abzug der letzten Summe der Rest größer wäre als der Divisor mit angehengten zwoen Nullen.

8. Wenn

8. Neben den Rest, wenn es einen gegeben hat, setze die nächste Klasse hin, und verfahre wieder nach den Regeln 3, 4, 5, 6, 7, bis endlich keine Klasse mehr übrig ist.

Sehet hier ein Beyspiel statt eines Beweises und die Formel der Kubus einer zweygliedichten Wurzel angewendet.

$$\overbrace{a+b}^{m}+n$$

Kubikzahl 12, 812, 904 (2 3 4
a^3 8 ... ...

4. 812 Rest mit neuer Klas.
12.. Divis. $=3a^2=3\times4$

Es ist $m^3=a^3+3a^2b$
$+3b^2a+b^3$ (§. 132.)

$3a^2b$ 36.. ...
$3b^2a$ 54. ...
b^3 27 ...

$3a^2b+3b^2a+b^3$ Summe 4167 ...
die Kubikzahl $=m^3$ 645 904 Rest mit neuer Klasse.

158 7 Divis. $=m^2=3(a+b)^2$

$3m^2n$ 634 8..
$3n^2m$ 11 04.
n^3 64

$3m^2n+3n^2m+n^3$ Summe 645 904

Rest 0

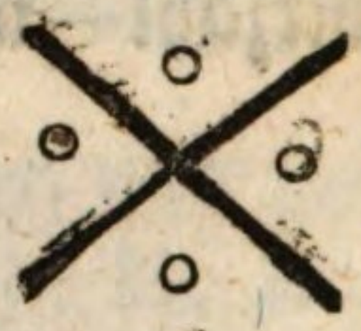
Nachdem $(a+b)^3=m^3$ abgezogen ist, müssen wir in der § 132 angeführten Formel m für a, und n für b setzen.

§. 134. Wenn die gegebne Zahl keine vollkommene Kubikzahl ist, müssen wir, wenn wir Decimaltheile der Wurzel haben wollen, so vielmal drey Nullen dazu setzen, so viel wir Decimalziffern für die Wurzel über die ganze Zahl haben wollen, und mit Ausziehung der Wurzel fortfahren, so können wir zwar der wahren Wurzel immer näher kommen, aber sie doch nie erreichen (§. 124.)

§. 135.

§. 135. Wenn man aus einem ächten oder unächten Decimalbruche die Kubikwurzel ausziehen soll, und die Zahl der Ziffern nach dem Strichlein sich nicht genau mit 3 dividieren läßt, so setze man eine oder zwo Nullen dazu, daß diese Division angeht, und darnach erst ziehe man die Wurzel aus. z. B. Man soll die Kubikwurzel aus dem Bruche 0,0034 ausziehen, so henget zuvor zwo Nullen daran, alsdann zieht die Wurzel aus 0,003 400 aus, weil der Nenner eines Decimalbruches, der eine Kubikzahl ist jederzeit aus 3 Nullen oder einer Zahlnullen bestehen muß die sich mit 3 genau dividieren läßt, und also auch so viele Ziffern nach dem Strichlein stehen müssen, damit man die Wurzel ausziehen kann (§. 89 und §. 106.)

§. 136. Willst du über die Ausziehung der Kubikwurzel eine Prüfung vornehmen, so multipliciere die gestandene Wurzel mit sich selbst, und das daraus entstandene Quadrat wieder mit der Wurzel, zu diesem Producte addiere den letzten Rest, wenn es einen gegeben hat, so muß, wenn nirgends gefehlt worden ist, wieder die gegebne Zahl herauskommen. Kürzer kann man sich folgender Weise bedienen: Mit beständig weggeworfnen Neunern schreibe rechterseits eines schiefstehenden Kreutzes den Reste von der Wurzel im vorigen Exempel 6;



linkerseits das Quadrat davon, oben hinauf den Kubus mit dem letzten Reste, und unten her die Kubikzahl: wenn nicht gefehlt worden ist, wird unten und oben im Kreutze die nämliche Zahl und Nulle stehen, doch ist dieses kein unfehlbares, sondern nur wahrscheinliches Zeichen, daß man nicht gefehlt habe.

A. §. 137. Was immer für eine Potenz durch eine andere von der nämlichen Wurzel multiplicieren.

A. Addieret die Exponenten, so wird euch die Summe den Exponenten des Productes geben.

z. B.

z. B. $a^2 \times a^2 = a^4$; $a^3 \times a^3 = a^6$; $a^2 \times a^3 = a^5$ $a \times a = a$ $am^2 \times m^3 = a \times m^2 \times m^3 = a \times m^5 = am^5$

Denn die Exponenten deuten an, wie oft die Wurzel in einer Potenz als Factor enthalten sey (§. 101): nun muß sie im Producte aus zwoen Potenzen so vielmal als Factor vorkommen, so oft sie in den Factoren selbes Productes war (§. 64): also giebt die Summe den Exponenten des Productes. B.

Es ist nämlich z. B. $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaa = a^5$

§. 138. Folglich wird eine Potenz durch eine andere von der nämlichen Wurzel dividieret, wenn man den Exponenten des Divisors von Exponenten des Dividendus subtrahieret. §.

z. B. $a^5 : a^2 = a^3$; $a^6 : a^2 = a^4$; $a^{m+n} : a^m = a^n$, $a^1 : a^1 = a^0$ $a^1 : a^1 = a^0 = 1$

und $a^m : a^m = a^0 = 1$; $a^5 : a^5 = 1$

§. 139. Folglich wenn der Exponent einer Potenz ein Negativzeichen hat, so ist selbe ein Bruch: und wenn eine Potenz m von a ein Bruch ist, dessen Nenner a^m ist, so wird der Exponent ein Negativzeichen vor sich bekommen. §.

z. B. $a^1 : a^2 = a^{1-2} = \frac{a^1}{a^2} = \frac{1}{a}$ (§. 74)

$a^1 : a^3 = a^{1-3} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}$

und $\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \times x = (\text{§. 71.}) = a^{-1} \times x = a^{-1}x$

Denn

B. Denn wenn eine Potenz ein ächter Bruch ist, indem so wohl der Nenner als der Zähler eine Potenz von der nämlichen Wurzel ist, so ist der Nenner von einer höhern Potenz, als der Zähler (§. 78), und also hat er einen größern Exponenten, welcher von dem kleinern abgezogen, nothwendig ein Negativzeichen hervorbringet (§. 61.)

S. §. 140. Weil in jeder Potenz die Wurzel so vielmal als Factor gesetzt wird, als der Exponent Einheiten hat, (§. 101.) so wird jede Potenz zur gegebnen höhern erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem Exponenten der gegebnen höhern Potenz multiplicieret. Und entgegen wird aus jeder gegebner Potenz A, die Wurzel einer andern Potenz B ausgezogen, wenn man den Exponenten der Potenz A mit dem Exponenten der Potenz B dividieret.

z. B. Das Quadrat von a^2 ist a^4 und die $\sqrt{a^4}$ ist a^2.

Eben so der Kubus von a^2 ist a^6 und $\sqrt[3]{a^6}$ ist a^2; wieder der Kubus von a^3 ist a^9 und $\sqrt[3]{a^9}$ ist a^3: endlich a^m zur Potenz erhoben ist $a^{m \times n}$; und $\sqrt[n]{a^{m \times n}}$ ist a^m, und $\sqrt[m]{a^{m \times n}}$ ist a^n.

S. §. 141. Es wird also überhaupt die Ausziehung der Wurzel n aus einer Potenz a^m recht angedeutet, wenn man den Exponenten der Wurzel mit dem Divisionszeichen nach dem Exponenten der gegebnen Potenz hinsetzt.

z. B.

$$\text{z. B. } \sqrt[2]{a} \text{ ist} = a^{1:2} \quad ; \sqrt[3]{a} = a^{1:3} \quad ; \sqrt[5]{a^2} = a^{2:5} \quad ;$$

$$\text{und überhaupt } \sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$$

§. 142. Derowegen wenn der Exponent einer 3.
Potenz sich genau mit 2 oder mit 3 dividieren läßt, so ist es leicht die Wurzel einer höhern Dignität daraus zu ziehen, denn man kann sie durch Ausziehung der Quadrat oder Kubikwurzel auf eine niederere Potenz, und endlich auf ein einfaches Quadrat oder einfachen Kubus herunter bringen, daraus man darnach die Wurzel ziehen kann.

z. B. Man soll aus einer gegebnen Größe die Wurzel der sechsten Potenz ausziehen, so ziehe man zu erst daraus die Quadratwurzel, und aus dieser die Kubikwurzel, so ist diese letzte die Wurzel der sechsten Potenz der gegebnen Größe.

$$\text{z. B. } \sqrt[2\ 6]{a} \text{ ist} = \sqrt[3]{a}, \text{ und } \sqrt[3\ 3]{a} \text{ ist} = a.$$

In Zahlen wenn man begehrte die Wurzel der sechsten Potenz von 2176782336, so ziehe aus dieser Zahl die Quadratwurzel (§. 121.) 46656 und darnach aus dieser die Kubikwurzel (§. 133.) 36, so ist diese die Wurzel der sechsten Potenz von der ersten Zahl.

VI. Von den Gleichungen, und Auflösungen der Aufgaben durch Hilfe derselben.

§. 143. In jeder Gleichung kann man ohne Schaden der Gleichheit einen Theil eines Gliedes, der vor sich + oder — hat, mit dem gegenseitigen Zeichen aus selbem Gliede in das andere hinüber setzen.

z. B. Es seyn gegeben der Gleichungen $a = b + x$, und $a = x - b$, so läßt sich die erste in $a - b = x$, die zweyte in $a + b = x$ verwandeln.

B. 1. Denn, wenn man von beyden Gliedern gleiches abzieht, bleibt die Gleichheit noch (§. 47.): Nun wenn man z. B. b von dem Gliede $b + x$ subtrahieret bleibet x allein übrig, und in dem andern Gliede a, wenn man b davon abzieht bekömmt man $a - b$; also sieht man wohl, daß man die Größe, welche in einem Gliede mit einem positiven Zeichen dasteht, in das andere mit dem Negativen übersetzen könne, ohne die Gleichheit zu verderben.

2. Wenn man beyderseits gleiches addieret, bleibt die Gleichung (§. 45): also wenn in einem Gliede $- b$ gestanden, addiere $+ b$, so wird $- b$ aufgehoben; und in dem andern Gliede erhältest du $+ b$: und eben so, weil die Reste gleich sind, wenn man gleiches von gleichem subtrahieret; (§. 47.) wenn eine Größe b in einem Gliede mit einem positiven Zeichen steht, darf man sie mit einem negativen auf die andere Seite oder in das andere Glied setzen. (§. 61.)

Z. §. 144. Folglich darf man auch in beyden Gliedern alle Positivzeichen in negative, und alle negative in positive verwandeln ohne dadurch der Gleichung zu schaden.

z. B. Aus $\frac{a + b - c = d + e x}{}$ darf man machen $\frac{-a - b + c = -d - e + x}{}$

Z. §. 145. Und man darf auch ein ganzes Glied mit wiedrigen Zeichen von einer Seite auf die andere übersetzen, und in dessen Stelle eine Nulle hinschreiben.

z. B.

z. B. Aus $\frac{a + b - e = d}{o = d - a - b + c}$ darf man machen

§. 146. Wenn in einer Gleichung alle Theile eines Gliedes einen gemeinschaftlichen Mitfactor haben, darf man ihn mit wiedrigen Zeichen in das andere Glied bringen, aber so, daß er sich an alle Theile desselben anhänge. §.

z. B. Die Gleichung $\frac{am + bm \text{ oder } (a + b)m = c - d}{}$

darf man verwandeln in $a + b = (c - d) : m$ oder $\frac{c - d}{m}$

und $(a+b) : m$ oder $(a+b) \times \frac{1}{m} = c - d$ kann verwandelt werden in $a + b = cm - dm$ oder $(c - d)\, m$: denn die Zeichen der Multiplication und Division sind einander zuwieder.

Wenn man den Mitfactor aus einem Gliede in das andere mit wiedrigen Zeichen übersetzt, so geschieht, wenn der Mitfactor eine ganze Größe ist, nichts anders als daß man gleiche Größe mit demselben dividieret, und wenn er eine gebrochne Größe mit dem Zähler Eins, oder Divisor eines ganzen Gliedes ist, daß man sie mit seinem Nenner oder diesem Divisor multipliciert; es bleibt aber in beyden Fällen die Gleichung (§. 51 und §. 49), also kann man diese Aenderung ohne Schaden der Gleichung vornehmen. B.

§. 147. Wenn ein Mitfactor nur an einem, oder einigen aber nicht allen Theilen eines Gliedes anhängt, so mag man ihn ohne Schaden der Gleichung, den Theilen, an denen er anhängt, nehmen, und allen andern in beyden Gliedern mit wiedrigem Zeichen anhengen. §.

z. B. Aus $\frac{am}{m} + b = c - d$ und aus $\frac{a}{m} + b = c - d$

wird $a + \frac{b}{m} = \frac{c-d}{m}$ wird $a + bm = cm - dm$

wiederum aus $am + bm + e = c - d$ kann man

machen $a + b + \frac{e}{m} = (c - d) : m$

B. Denn, wenn ich einen Mitfactor z. B. m jene theilen, mit denen er mit vorausgesetztem, oder darunter verstandnen Multiplicationszeichen (§. 55.) verbunden ist, wegnehme, und mit widrigem nämlich dem Divisionszeichen (§. 33.) an die übrigen anhänge, so dividiere ich die ganze Gleichung mit dem Mitfactor m (§. 33 und §. 63), und die Gleichheit der Glieder bleibt (§. 51.)

Hängt der Mitfactor an einigen Gliedern, als der Nenner eines Bruches $\frac{1}{m}$ oder als der Divisor, so werden alle Glieder, denen man diesen Nenner oder Divisor weg nimmt (§. 71), und alle, denen man ihn, da sie zuvor davon frey waren, mit dem ausdrücklichen oder darunter verstandnen Multiplicationszeichen anhengt, damit multiplicieret, (§. 33, §55) und bleibt wieder die Gleichheit (§. 49.) also darf man auch dieses ohne ihren Schaden thun.

L. §. 148. Wenn das Wurzelzeichen oder $\sqrt[m]{}$ vor einem Gliede einer Gleichung steht, und zum ganzen Gliede gehört, darf man es, wenn man das andere Glied zur Potenz m erhebt, wegnehmen; und entgegen, wenn ein Glied in einer höhern Potenz m steht, kann man seinen Exponenten m wegnehmen, wenn man nur zugleich aus dem andern Gliede die Wurzel selber

ber Potenz auszieht, oder, wenn sie sich nicht wirklich ausziehen läßt, durch das vorangesetzte Wurzelzeichen $\sqrt[m]{}$ die Ausziehung andeutet. Eben so darf man auch beyde Glieder zugleich zur höhern Potenz erheben, oder auf eine niedere herunter setzen.

z. B. Wenn $\sqrt[m]{a}=b$ ist, so ist auch $a=b^m$

und wenn $a=b$ so ist auch $\sqrt[m]{b}=a$

wenn $\sqrt[m]{(a+b)}=(c-d)$ ist, so ist auch $a+b=(c-d)^m$

Wiederum wenn $a=b$ oder $a=-b$ so ist auch $a^m=b^m$ $a=-b$

Alles dieses erhellet aus dem §§ 49, 51 und B. 108: denn $\sqrt[m]{a}$ wird zur Potenz m erhoben, wenn man das Zeichen $\sqrt[m]{}$ weg nimmt.

§. 149. Wenn der nämliche Theil mit dem nämlichen Zeichen vor sich, oder mehr solche in beyden Gliedern da sind, kann man sie beyderseits wegstreichen; so kann man auch einen Mitfactor, der zu beyden ganzen Gliedern gehört, beyderseits weglassen. §.

z. B. Für $a+b=b+c$ kann man setzen $a=c$
Eben so für $a-b=c-b$ setze $a=c$
für $(a+b)\times m=(b+c)\times m$ oder für $(a+b):m=(b+c):m$
setze $a=c$

Denn im ersten Falle wird beyderseits gleiches abgezogen, wenn + voraus steht; und gleiches addieret, wenn — vorangeht. Im letzten Falle wird, wenn der Mitfactor eine ganze Größe ist, beyderseits mit demselben dividieret, da man ihn weglaßt; B.

läßt; wenn er aber der Divisor oder Nenner eines Bruches ist, dessen Zähler 1 ist, wird beyderseits mit ihm, wenn man ihn weg läßt, multiplicieret, also bleibt die Gleichung in allen diesen Fällen (§§ 45, 47, 51, 49.)

§. 150. Man nennet eine Gleichung vom ersten Grade oder einfache Gleichung, in welcher die unbekannte Größe über die erste Potenz nicht hinauf steigt. Eine quadratische aber oder eine Gleichung vom zweyten Grade, in der die höchste unbekannte Potenz ein Quadrat ist, und vom dritten Grade, wenn sie ein Kubus ist.

z. B. $a + x = b$ ist eine Gleichung vom ersten Grade, $a + x^2 = b$ und $x^2 + a x = b$ sind vom zweyten Grade.

E. §. 151. Die Wurzel einer Gleichung nennet man den Werth der darinnen vorkommenden unbekannten Größe, den man aus der Gleichung herausbringt; was man thut ihn aus der Gleichung heraus zu bringen heißt die Reduction.

z. B. Es sey gegeben die Gleichung $a + x = b$, wenn ich a in das andere Glied herüber setze habe ich $x = b - a$: diese Aenderung der Gleichung ist die Reduction, und $b - a$ der Werth von x ist die Wurzel dieser Gleichung.

Z. §. 152. Man muß also so viele Gleichungen geben, so viel unbekannte Größen in einer Aufgabe vorkommen, wenn man einer jeden bestimmten Werth haben will, sonst ist das Problem unbestimmt, das ist, man kann es nicht auflösen, wenn man nicht eine von den unbekannten Größen nach Belieben bestimmt, weil man sonst unendliche Auflösungen hätte: oder es ist nur halb bestimmt, so, daß es nämlich wegen beygesetzten Bedingungen nur eine gewisse Zahl, nicht unendlich viele Auflösungen hat.

z. B.

z. B. $x + y = 12$. Wenn x und y auch für Brüche gelten darf, so ist diese Gleichung ganz unbestimmt, wenn sie aber nur ganze Zahlen bedeuten sollen, ist es nur halb bestimmt, weil $1 + 11 = 12$, $4+8 = 12$ ꝛc. denn es können nur 6 paare verschiedner ganzer Zahlen Summen von zwölfe machen:

§. 153. Ein bestimmtes Problem algebraisch aufzulösen.

Die allgemeine Größen drücke, wenn sie unbekannt sind, mit den letztern, die Bekannten aber mit den erstern Buchstaben des Alphabets aus. Nachdem diese Benennung fest gesetzt ist, so suche aus den Umständen des Problems so viele Gleichungen heraus zu ziehen, als unbekannte Größen darinnen vorkommen (sollte aber dieses nicht angehen, so wäre das Problem nicht völlig bestimmt) sodann schreite zur Reduction: diese ordentlich zu machen.

1. Lösche die Theile aus, die in beyden Gliedern die nämlichen mit den nämlichen Zeichen vorkommen, wenn je solche vorhanden sind, und in gleichen die Mitfactoren, die die nämlichen an beyden ganzen Gliedern hangen, (§. 149.)

2. Wenn die unbekannte Größe entweder allein ohne Mitfactor, oder mit solchen in beyden Gliedern unter dieser ihren Theilen erscheinet, setze alle selbe Theile in ein Glied zusammen, die andern Theile aber alle in das andere Glied, aber mit Veränderung der Zeichen in wiedrige. (§. 143.)

z. B. Aus $ax + b = c - x$ wird $ax + x = c - b$

3. Wenn die unbekannte Größe mit einem Mitfactor verbunden ist, so mache man sie durch die Multiplication oder Division beyder Glieder mit diesem Mitfactor davon los (§. 146 und §. 147), man setze aber die Mitfactoren von x oder

z. B.

einer

einer Potenz von x, wenn mehrere vorkommen in ein ( ) zusammen, und x außer selbe.

z. B. Aus $ax + x$ oder $(a + 1)x = c - b$ wird $x = (c - b) : (a + 1)$ und aus $\frac{x}{m} = c$ wird $x = cm$

4. Wenn vor der unbekannten Größe ein Wurzelzeichen $\sqrt[m]{}$ steht, so erhebe beyde Glieder zur Potenz m. Wenn aber die unbekannte Größe zur Potenz m erhoben gegeben wird, so ziehe die $\sqrt[m]{}$ daraus. (§. 148.)

z. B. Aus $\sqrt{x} = m$ mache $x = m^2$. Aus $x^2 = b$ mache $x = \sqrt{b}$

Damit man aber die Wurzel würklich ausziehen könne, muß zuvor, wenn das Quadrat, unganz ist, selbes ergänzet und darum beyden Gliedern der abgehende Theil addieret werden (§. 114, und §. 45.)

z. B. Aus $x^2 + 2ax = b$ mache $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$
darnach $x + a = \sqrt{(b + a^2)}$
endlich $x = \sqrt{(b + a^2)} - a$

5. Wenn mehr unbekannte Größen z. B. x und y in den gegebnen Gleichungen vorkommen, so bestimme zu erst den Werth von einer z. B. von x in Rücksicht auf die andern, das ist, bringe durch die Reduction eine Gleichung dahin, daß eine der unbekannten Größen x in einem Gliede allein stehe, darnach setze den Werth von dieser an ihre Stelle in der andern Gleichung, so ist einmal diese aus der Gleichung weggebracht.

z. B. Es sey $x + 1 = y - 1$, und $y + x = 2(x - 1) = 2x - 2$

so ist $x + 2 = y$ und $x + 3 = 2x - 2$

Eben

Eben so, wenn noch mehr unbekannte Größen sich in den gegebnen Gleichungen befinden, kann man je eine nach der andern wegbringen, und immer zwo und zwo Gleichungen durch die Substition des Werthes einer unbekannten Größe in Vergleich der andern auf eine zusammen ziehen, bis zu letzt nur eine Gleichung und eine unbekannte Größe überbleibt, deren völligen Werth man durch die Reduction findt, und wieder in der Bestimmung einer andern auf sie substituieret, daß auch sie bekannt wird, und so wird immer eine unbekannte Größe nach der andern durch die Substition der schon bekannten in ihrer Gleichung determiniert.

z. B. Aus $x+3 = 2x-2$ folglich ist $= x+2$

nimmt $x+5 = 2x$ $= 5+2 = 7$

und $5 = x$

Wir wollen zur fernern Erklärung und Uebung einige Aufgaben hersetzen.

§. 154. Man fragt einen, wie viel er Gulden im Spiele verlohren habe; er giebt zur Antwort: wenn ich halb so viel und ein Drittel und ein Viertel so viel verlohren hätte, als ich wirklich verlohren habe, so hätte ich um einen Gulden mehr verlohren, als ich wirklich verlohren habe; wie viel hat dieser verlohren? A.

Nennen wir die Zahl der verlohrnen Gulden x, so ist A.

hier $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x+1$, oder wenn wir diese 3 Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen $(12x+8x+6x) : 24$ das ist, $26x : 24$, oder $x + (2x : 24)$

oder $x+(x:12) = x+1$

beyderseits x weggenommen $x : 12 = 1$

beyderseits mit 12 multiplicieret $x = 12$

§. 155.

§. 155. Wenn wir in dieser Gleichung an statt 1 im zweyten Gliede a setzen, so wird das Problem allgemein,

also $x + x : 12 = x + a$

Reduction $x : 12 = a$

$x = 12a$

Wann $a = 2$ so ist $x = 24$; ist $a = 3$, so ist $x = 36$ ꝛc. Noch allgemeiner wird dieses Problem, wenn wir b für 12 setzen; denn, so haben wir $x = ba$, und nach verschiednen Werthe der Buchstaben a und b ändert sich der Werth von x.

§. 156. Ein anderer hat auf zwey Spiele 26 Gulden verlohren, und im zweyten 8 Gulden mehr als im ersten, wie viel hat er in jedem verlohren?

Es sey die Zahl der im ersten Spiele verlohrnen Gulden $= x$, also im zweyten $x + 8$, so ist der ganze Verlurst

$2x + 8 = 26$

——— 8 subtrahiert.

$2x = 26 - 8 = 18$

——— mit 2 dividiert.

$x = 18 : 2 = 9$

Setzen wir a für die Summe 26, und b für die Differenz 8, so ist die größere Zahl $x + b$, wenn die kleinere x heißt: das Problem wird allgemein, und sieht also aus:

$2x + b = a$

folglich ist $x + b = \frac{a - b + b}{2}$

$2x = a - b$

$x = \frac{a - b}{2}$

unter gleicher Benennung $= \frac{a - b + 2b}{2}$

$= \frac{a + b}{2}$

Das heißt: Wenn zwoer größen Summe und Differenz gegeben werden, so ist die kleinere = der halben Summe weniger der halben Differenz; die größere aber bestehet aus der halben Summe und halben Differenz zusammen. Von diesem Satze werden wir in der Trigonometrie §. 613. einen Gebrauch machen.

§. 157.

§. 157. Es hat eine Person in den Glückshafen A. all ihr Geld gelegt, und auf den ersten Zug 3 Ducaten verlohren, das übrige legte sie wieder darein und bekam ihren Einsatz doppelt, weniger 3 Ducaten, zum drittenmal gieng es ihr wieder so, zum viertenmal legte sie wieder alles hinein, und bekamm es doppelt, machte aber der Zug nicht mehr als einen Ducaten aus, wie viel Ducaten hatte sie anfangs?

Es sey die gesuchte Zahl x, also nach dem ersten Zug hatte sie x — 3, dieses Geld verdoppelt ist 2 x — 6, und weil davon 3 Ducaten mangelten, so hatte sie nach dem zweyten Zuge 2x—6—3, das ist, 2 x—9, diese verdoppelt geben 4 x — 18, und also nach dem dritten Zuge blieben ihr 4x—18—3 oder 4 x — 21, diese verdoppelt machen 8x—42 also ist 8x—42=1 A.

$$8x = 42 + 1 = 43$$

$$x = \frac{43}{8} = 5.\frac{3}{8}$$

§. 158. Man soll, wenn es möglich ist, zwey Quadrate finden, derer Differenz dem Quadrate der Differenz der Wurzel gleich sey. A.

Nennen wir die Wurzel der kleinern große x, die Wurzel der größern x + y und also ihre Differenz y, so ist vermög des Problems A.

$$(x+y)^2 - x^2 = y^2$$

oder $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 = y^2$ (§ 110)

oder $2xy + y^2 = y^2$ weil $+x^2$ von $- x^2$ zernichtet wird

folglich $2xy = 0$

und $x = 0$

Also sind solche zwey Quadrate nicht möglich.

§. 159. Zwey Quadrate zu finden, wenn es möglich ist, derer Differenz dem Kubus der Differenz der Wurzeln gleich ist. A.

Heißen wir wieder die Wurzel der kleinern Größe x, so ist vermög der Bedingung a.

(x

$$(x+y)^2 - x^2 = y^2$$
oder $x^2+2xy+y^2-x^2=y^2$
oder $2xy+y^2=y^2$

dividiere mit y

also $2x+y=y^2$
folglich $2x=y^2-y$

also $x=\frac{y^2-y}{2}=(y-1)\times\frac{y}{2}$

Folglich wenn nicht y^2-y nichts ist, das ist, wenn nicht $y=y^2$ ist, oder wenn nicht y Eins ist, ist die Bedingung dieses Problems möglich: und also ist dieses Problem ein nur halb bestimmtes (§ 152) und kann man für y eine Zahl setzen, was man für eine will, nur nicht Eins, und darnach daraus auch x bestimmen. z. B. Es seyy=2 so ist $y=1$, und $y-1=1$, folglich $x=1\times\frac{1}{2}=1$, und $x+y$ oder die größere Wurzel $=1+2=3$, ihr Quadrat aber 9, davon wenn man x^2 oder 1 abzieht, bleibt 8 die Kubikzahl der Differenz der Wurzeln 2. Setze aber $y=3$, also $y^2=9$, so ist $y:2=1\frac{1}{2}$, und $y-1=3-1=2$; also $x=2\times 1\frac{1}{2}=3$, und $x+y=3+3=6$, das Quadrat dieser Zahl ist 36, wenn man nun x^2 oder 9 davon abzieht, so giebt die Differenz 27, die Kubikzahl der Differenz der Wurzeln 3.

Aus dieser und der nächst vorangehenden Aufgabe und Auflösung erhellet, daß man durch die Algebra auch die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Dinge in gewissen Fällen finden könne, und daß sie also zu Zeiten auch die Scheinbegriffe von den wahren zu unterscheiden diene.

A. §. 160. Man giebt die Summe $=a$ zweer Größen, und das Product aus einer in die andere $=b$ man soll die Größen selbst finden.

A. Nennen wir eine dieser Größen, weil beyde unbekannt sind, x, die andere y, so haben wir diese zwo Gleichungen.

I. $x+y=a$ II. $xy=b$

$x=a-y$ $x=b:y$

$a-y=b:y$ (§ 43)

$ay-y^2=b$ (§ 144)

$y2-ay=-b$

$y^2-ay+\frac{1}{4}a^2=-b+\frac{1}{4}a^2$ (§ 144)

$=a^2-4b$ (§ 79)

4

also $y-\frac{1}{2}a=\sqrt{(a^2-4b)}$ (§ 111) $=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$

oder $\frac{1}{2}a-y$ 4 (§ 123)

folglich $y=\frac{1}{2}a+\sqrt{(a^2-4b)}$

oder $y=\frac{1}{2}a-\sqrt{(a^2-4b)}$

denn wenn $\frac{1}{2}a-y=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$ ist

so ist auch $-\frac{1}{2}a+y=-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$ (§ 144)

und also $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$

Folglich $x=a-y$ $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$ nach dem ersten, oder $x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$ nach dem zweyten Werthe von y.

Weil dieses Problem vom zweyten Grade ist (§ 150) so haben wir auch zweyerley Werthe der Größen x und y bekommen. Die aus der zweyfachen Wurzel des nämlichen Quadrates entstanden sind (§ 111) darum ist aber doch das Problem determinieret, denn so bald man nur bestimmt ob x oder y die größere Größe bedeuten soll (für sich selbst kann jeder dieser Buchstab, den man dafür will gelten lassen, die größere bedeuten) so hat gleich nur ein Werth von y in der Gleichung mehr statt: denn nehmen wir den ersten Werth von y an, nämlich $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}$ so ist $x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}$, das ist, wenn y die größere Größe bedutet, so bedeutet x die kleinere; und verkehrt, wenn man den zweyten Werth von y annimmt, nämlich $\frac{1}{2}a-$

$-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$, wird $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$, das ist, es kömmt das nämliche heraus, nur das x jetzt die größere, und y die kleinere Größe bedeutet, nämlich die größere Größe heisse sie x oder heisse sie y; ist $=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$, und die kleinere ist $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4b)}$. Setzen wir nun es sey $a=24$ und $b=135$; so ist $a^2=576$, und $4b=540$, also $a^2-4b=36$, und $\sqrt{(a^2-4b)}=6$, die halbe Wurzel $=3$: also die größere Größe $=12+3=15$, die kleinere aber $=12-3=9$.

Noch etliche solche Aufgaben werden gleich nach der Lehre von den Proportionen folgen.

VII. Von den Verhältnissen und Proportionen.

E. §. 161. Wenn man zwo Größen miteinander vergleichet, also, daß man nur auf ihre Differenz sieht, so heißt man ihre Verhältniß gegeneinander eine arithmetische Verhältniß; ein geometrische aber, oder ohne Beywort eine Verhältniß jene, bey der man sieht, wie oft die kleinere, oder ein Theil der kleinern in der größern enthalten sey; der Quotient, welcher dieses andeutet, heißt der Nenner oder Name der Verhältniß. Die Größen, die man miteinander vergleicht, heissen die Glieder der Verhältniß, und zwar das vorgehende jene Größe, die man gegen die andere hält; die andere wird das nachgehende oder folgende genennt: den Quotienten aber, welcher entsteht, wenn man das vorangehende Glied durch das nachgehende dividieret, heißt man den Exponenten der Verhältniß. Werden die Glieder verwechselt, so heißt man die daraus entstehende Verhältniß die verkehrte der andern.

z. B. 6 — 2 ist eine arithmetische Verhältniß, und die Differenz 4. Aber 6 : 2 ist eine geometrische, deren Exponent und Nenner 3 ist, denn wenn das größere Glied vorangeht, ist der Nenner zugleich Exponent 2 : 6 ist die verkehrte der vorigen, der Nenner ist zwar der nämliche, aber der Exponent ist $\frac{1}{3}$, und allezeit ein Bruch, wenn das kleinere Glied voran geht. Ueberhaupt kann jede geometrische Verhältniß durch a : a m angedeutet werden, da a das erste, a m das zweyte Glied, und m den Exponenten bedeutet; die verkehrte aber von a : a m ist a m : a oder $\frac{1}{a} : \frac{1}{am}$, welches gleich viel ist, wie §. 180. n 10 erhellen wird.

§. 162. Wenn in zwoen oder mehrern arithmetischen Verhältnissen die nämliche Differenz der Glieder ist, heißt man sie ähnlich, die geometrischen aber sind ähnlich oder einerley, wenn sie einerley Exponenten haben, und man nennt die Aehnlichkeit zwoer Verhältniße eine Proportion, und die Glieder, welche dazu gehören heißt man proportionale Größen; wenn man nichts dazusetzt, versteht man allezeit eine geometrische Proportion. E.

z. B. Es ist 8 — 2 = 6 und 9 — 3 = 6; also sind diese zwo arithmetische Verhältniße einander ähnlich, und 8, 2, 9, 3, sind 4 arithmetisch proportionale Zahlen: man schreibt ihre Proportion also an: 8 — 2 = 9 — 3

Aber 8 : 2 = 4, und 12 ; 3 = 4 sind zwo geometrisch-ähnliche Verhältnisse, weil sie den nämlichen Exponenten 4 haben. Es befindet sich also zwischen diesen vier Gliedern 8, 2, 12, 3 eine geometrische Proportion, die man also anschreibt, 8 : 2 = 12 : 3, oder also 8 : 2 :: 12 : 3, und man sagt: wie sich 8 zu 2 verhält, so verhält sich 12 zu 3.

§. 163. Wenn das letzte Glied der vorgehenden Verhältniß zu gleich das erste der folgenden ist, E.

so

so heißt es eine stettige oder continuierliche Proportion, und das Glied, welches beyden Verhältnissen gemein ist, heißt die mittlere **Proportionalgröße.**

z. B. Es ist 12 — 9 = 9 — 6 und 8 : 4 = 4 : 2. Man pflegt auch die arithmethische stettige Proportion also zu schreiben ∴ 12, 9, 6; und die geometrische also ∷ 8, 4, 2.

Von den arithmetischen Progreßionen.

E. §. 164. Eine Reihe Größen, die immer um die nämliche Differenz wachsen oder abnehmen, heißt man eine **arithmetische Progreßion**, und die Theile derselben heissen die **Glieder der Proportion**, die Zahl der Glieder aber heißt die **Seite der Progreßion.**

z. B. 12, 9, 6, 3, 0 ist eine abnehmende, und 0, 3, 6, 9, 12 eine wachsende Progreßion: jede von diesen hat 5 Glieder; also ist ihre Seite 5. Selbst die gewöhnliche oder natürliche Ordnung der Zahlen, 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. stellet eine wachsende arithmetische Proportion dar, in der die Differenz immer 1 ist. Algebraisch werden alle arithmetische Progreßionen überhaupt also vorgestellt: a, a ± d, a ± 2d, a ± 3d, a ± 4d ꝛc.

L. §. 165. In jeder arithmetischen Progreßion ist die Summe der zwey äußersten Gliedern, der Summe jeder Zweyer, die von den äußersten gleich weit abstehen, gleich.

Addiere man nur das erste zum letzten Gliede in der allgemeinen Formel, und jede zwey davon gleichweit entfernte Glieder zusammen, so werden die daraus entstehenden Summen auf den ersten Anblick die Wahrheit dieses Satzes zeigen, denn sie werden alle die nämlichen seyn.

$$\frac{a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d \quad a+5d}{a+2d \quad a+d \quad a}$$
$$2a+5d \quad 2a+5d \quad 2a+5d$$

§. 166. Wenn die Zahl der Glieder ungleich ist, so ist das mittlere von beyden äußersten gleich weit entfernet, und also kömmt es in der Summe zweymal vor: in diesem Falle also ist die Summe jeder zwo Glieder, die von dem mittlern gleichweit abstehen, noch so groß als das mittlere Glied. 3.

z. B. $a \quad a+d \quad a+2d \quad a+3d \quad a+4d$
$a+d \quad a$
$2a+4d \quad 2a+4d \quad 2a+4d$

§. 167. Es ist also die Summe einer ganzen arithmetischen Progreßion gleich dem Producte aus der Summe des ersten und letzten Gliedes (oder auch dem mittlern doppelt, wenn die Zahl der Glieder ungleich ist) in die halbe Seite der Progreßion. 8.

z. B. $1+2+3+4+5+6 = (1+6) \times 3 = 21$
und $1+2+3+4+5+ = (5+1) \times 2\frac{1}{2} = 15$ oder $= (3 \times 2) \times 2\frac{1}{2} = 15$

§. 168. Aus dem § 166 folget, daß, wenn man in einer Progreßion von einer ungeraden Seite die Summe der zwey äußersten Glieder halbieret, man das mittlere Glied bekomme. 8.

z. B. a a+d a+2d. Die Summe der äußersten ist 2a+2d die halbe Summe a+d ist das mittlere Glied.

§. 169. Das letzte Glied einer arithmetischen Progreßion erhält man, wenn man die Differenz der Glieder 1 mit der Seite der Progreßion weniger Eins multiplicieret, und zum Producte das erste Glied addieret: 9.

B. Denn wie man in der allgemeinen Formel sieht, es kömmt die Differenz im zweyten Gliede zum erstenmal vor, und darnach in jedem Gliede auf ein neues mit der Summe des vorangehenden.

Z. §. 170. Wenn also das erste Glied a ist, und d die Differenz, und n die Seite der Progreßion, so ist das letzte Glied $a + (n - 1)d$, und wenn $d = 1$ ist, ist das letzte Glied $a + n - 1$.

z. B. Es sey das erste Glied 3, die Differenz 4, die Seite der Progreßion 7, so ist das letzte Glied $3 + (6 \times 4) = 3 + 24 = 27$.

Z. §. 171. Also ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $2a + (n - 1)d$, und die Summe aller Glieder $= 2a + (n - 1)d \times \frac{n}{2}$ (§ 167) $= \frac{2an}{2} + (n - 1)\frac{dn}{2} = an + (n^2 - n)\frac{d}{2}$

z. B. Es sey das erste Glied 3, die Differenz 4, die Seite 7, so ist $an = 21$; $n^2 - n = 49 - 7 = 42$; $\frac{d}{2} = 2$; folglich $(n^2 - n)\frac{d}{2} = 42 \times 2 = 84$; und die ganze Summe $21 + 84 = 105$.

Z §. 172. Wenn $a = 1$, so wird die allgemeine Formel der Summe aller Glieder in diese $n^2 + (n^2 - n)\frac{d}{2}$ zusammen gezogen. Wennn $d = 2$ ist, wird aus der allgemeinen diese besondere Formel $an + n^2 - n$. Und wenn zugleich $a = 1$ und $d = 2$ ist, so wird aus der allgemeinen Formel diese $n + n^2 - n$, oder n^2; also, in diesem letzten Falle ist die Summe aller Glieder dem Quadrate der Seite gleich.

Z. §. 173. Wenn $a = n = \frac{1}{2}$ ist, so bekommen wir aus der allgemeinen Formel der Summe aller

Glie-

Glieder diese $n^2 + n^3 - - n^2$, das ist n^3 allein: also wenn das erste Glied, die Seite, und die halbe Differenz in einer Progreßion einander gleich sind, so ist die Summe aller Glieder dem Kubus des ersten Gliedes oder der Seite oder halben Differenz gleich.

§. 174. Aus diesen zweenen Zusätzen sieht man wie aus einer allgemeinen Formel verschiedene sonderheitliche hergeleitet werden. Man bestimmet nämlich auf verschiedene Weise, was immer noch in der allgemeinen Formel unbestimmtes vorkömmt, dieser Kunstgrif dient zu gar vielen Erfindungen.

Von der geometrischen Proportion insonderheit.

§. 175. In der geometrischen Provortion ist das Product der zwey äußersten Glieder in einander dem Producte der mittlern gleich. E.

Es sey daß erste Glied a, der Exponent m, so ist das zweyte Glied der ersten Verhältniß am (§ 161): wenn man nun das dritte Glied der Provortion, oder erste der zweyten Verhältniß b heißt, so ist das vierte Glied der Proportion oder zweyte der andern Verhältniß b m: es werden nämlich die 4 Glieder einer jeden Proportion überhaupt durch a: a m = b: b m vorgestellt, nun ist das Product der äußersten a x bm oder abm der mittlern am x b = abm; also das nämliche. B.

§. 176. Folglich ist in einer stetigen Proportion das Product der äußersten Glieder dem Quadrate des mittlern gleich. Denn wenn die Proportion stetig ist, so kann man sie also ausdrücken: a: b = b: c (§163); folglich ist $ac = b^2$ 2.

Z. §. 177. Man findt also in einer stetigen Proportion das mittlere Glied, wenn man aus dem Producte der äußersten die Quadratwurzel auszieht, (§ 100, § 110, § 121)

z. B. Man sucht die mittlere Proportionalzahl zwischen 3 und 12; so ist $3 \times 12 = 36$, und $\sqrt{36} = 6$, also 3 : 6 = 6 : 12. Es sey $a : x = x : b$, so ist $x^2 = ab$ und $x = \sqrt{ab}$.

Z. §. 178. Aus dem § 175 folgt überhaupt, daß so oft zwey gleiche Producte gegeben sind, man ihre Factoren leicht in eine geometrische Proportion stellen kann, man darf nämlich nur zweene Factoren von einem Producte die äußersten, und die zweene des andern die mittlere Glieder seyn lassen, so werden durch verschiedne Versetzung derselben gleich 8 Analogien oder Proportionen heraus kommen.

z. B. Es sey $ab = cd$	Insonderheit $3 \times 4 = 2 \times 6$, so ist
1 $a : c = d : b$	$3 : 2 = 6 : 4$
2 $a : d = c : b$	$3 : 6 = 2 : 4$
3 $b : c = d : a$	$4 : 2 = 6 : 3$
4 $b : d = c : a$	$4 : 6 = 2 : 3$
5 $c : a = b : d$	$2 : 3 = 4 : 6$
6 $c : b = a : d$	$2 : 4 = 3 : 6$
7 $d : a = b : c$	$6 : 3 = 4 : 2$
8 $d : b = a : c$	$6 : 4 = 3 : 2$

Da haben wir gleichsam eben so viele Lehrsätze: also, wenn wir die erste Setzung mit der zweyten vergleichen, sehen wir: daß wenn vier Glieder in einer Proportion stehen, so verhalte sich das erste Glied zum dritten, wie das zweyte zum vierten. Wenn wir die erste mit der vierten vergleichen, sehen wir: daß wenn vier Glieder in einer Proportion stehen, selbe einander, auch wenn man die Ordnung rückwerts nimmt, proportional bleiben ꝛc.

§. 179. Zu erforschen ob vier Größen in gewisse Ordnung gestellt eine geometrische Proportion machen oder nicht. a

Multipliciere miteinander die zwo äußersten, darnach auch die zwo mittleren; wenn beyde Producte einander gleich sind, hat die Proportion statt, sonst nicht. (§ 175.)

z. B. Es seyn diese vier Zahlen 6, 13, 5, 12 in dieser Ordnung gegeben, so ist $6 \times 12 = 72$, und $13 \times 5 = 65$, weil dann diese Producte verschieden sind, so können diese vier Zahlen in dieser Ordnung keine geometrische Proportion machen. Wiederum man giebt $3, 33\frac{2}{3}, 5, 20$, so ist das Product der äußersten $3 \times 20 = 60$, der mittlern $33\frac{1}{2} \times 5 = 165\frac{5}{3}$ oder $166\frac{2}{3}$, also wieder keine geometrische Proportion. Ordnen wir sie aber also, $3, 5, 20, 33\frac{1}{3}$ so daß das Product der äußersten $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ und der mittleren das nämliche $5 \times 20 = 100$ sey, so machen in dieser Ordnung diese Zahlen miteinander eine geometrische Proportion. Eben so, wenn man diese Prüfung auf die im vorgehenden § angeführte Wechslungen der Glieder bey den Zahlen anwendet, findt man sie alle richtig, damit man aber auch bey dem allgemeinen Ausdrucke die Richtigkeit sehe, wollen wir uns anderer Buchstaben bedienen, nämlich: z.

1.	a	: am =	b	: bm	
2.	a	: b =	am	: bm	
3.	bm	: am =	b	: a	
4.	bm	: b =	am	: a	
5.	am	: a =	bm	: b	
6.	am	: bm =	a	: b	
7.	b	: a =	bm	: am	
8.	b	: bm =	a	: am	

§. 180. Die nämliche Prüfung wenden wir auf die nachfolgenden 10 Formeln an, welche sich alle außer der letzten auf $a : am = b : bm$ beziehen, so wird man nicht zweifeln können, daß in allen die Proportion richtig sey. 3.

1. $a + am : b + bm = a : b = am : bm$

2. $am - a : bm - b = a : b = am : bm$

$n \quad n\ n \quad n \quad n\ n$

3. $a : a^n m = b : b^n m$

4. $\sqrt{a} : \sqrt{a} \times \sqrt{m} = \sqrt{b} : \sqrt{b} \times \sqrt{m}$

5. $a : amc = b : bmc$

und $a : \frac{am}{c} = b : \frac{bm}{c}$

6. $ac : am = bc : bm$

oder $\frac{a}{c} : am = \frac{b}{c} : bm$

7. $ac : amc = b : bm$

oder $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = b : bm$

8. $ac : amc = bd : bmd$

oder $\frac{a}{c} : \frac{am}{c} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{d}$

9. $ac : amd = bc : bmd$

oder $\frac{a}{c} : \frac{am}{d} = \frac{b}{c} : \frac{bm}{d}$

10. $a : am = \frac{c}{am} : \frac{c}{a}$

Es wird wohl der Mühe werth seyn, daß wir diese zehen Formeln als so viele wichtige Lehrsätze auch mit Worten ausdrücken. Die erste lautet also: Die Summe aus dem ersten und zweyten Gliede einer Proportion verhält sich zur Summe aus dem dritten und vierten, wie sich das erste Glied zum dritten, oder das zweyte zum vierten verhält.

Die

Die zweyte: die Differenz zwischen dem ersten und zweyten Gliede (oder zwischen dem zweyten und ersten) verhält sich zur Differenz zwischen dem dritten und vierten (oder vierten und dritten) wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweyte zum vierten.

Die dritte: Wenn man jede Glieder einer Proportion zu einer nämlichen was immer für einer Potenz erhebt, so werden auch selbe Potenzen einander proportional seyn.

Die vierte: Wenn man aus jeden Gliedern die Wurzel von was immer für einer nämlichen Potenz ausziehet, so werden auch selbe Wurzeln einander proportional seyn.

Die fünfte: Wenn man das zweyte und vierte Glied mit was immer für einer nämlichen Größe multiplicieret, oder damit dividieret, bleibt die Proportion.

Die sechste: Wenn man das erste und dritte Glied einer Proportion mit was immer für einer nämlichen Größe multiplicieret, oder damit dividieret, bleibt die Proportion.

Die siebende: Wenn man das erste und zweyte Glied mit einer nämlichen Größe multiplicieret, oder damit dividieret, bleibt die Proportion.

Die achte: Wenn man das erste und zweyte Glied mit einer nämlichen, und zugleich das dritte und vierte mit einer andern (doch diese beyde Glieder mit der nämlichen) Größe multiplicieret, oder dividieret, bleibt die Proportion.

Die neunte: Wenn man das erste und dritte Glied mit einer nämlichen, das zweyte und vierte aber mit einer andern (aber beyde der nämlichen) Größe multiplicieret, oder dividieret, bleibt die Proportion.

Die zehende: Wenn die nämliche Größe durch das vorangehende und nachgehende Glied einer Verhältniß dividieret wird, so sind die Quotienten in der verkehrten Verhältniß selber Glieder.

§. 181. Ferner werden wir, wenn wir verschiedne Proportionen miteinander vergleichen, und auf die oben § 179 gemeldte Prüfung acht haben, folgende Formeln für richtig befinden.

1. Wenn $a : am = b : bm$
und $am : amn = bm : bmn$
so ist auch $a : amn = b : bmn$

2. Wenn $a : am = b : bm$
und $am : amn = b : \frac{bm}{n}$
so ist auch $a : amn = b : bm$

3. Wenn $a : am = b : bm$
und $c : cn = d : dn$
und $f : fr = g : gr$
so ist auch $acf : amcnfr = bdg : bmdngr$
daraus folget.

4. Wenn $a : am = b : bm$
$c : cm = b : bm$
so sey $ac : amcm = b^2 : b^2m^2$

$a : am = b : bm$
$c : cm = b : bm$
$d : dm = b : bm$
$acd : amcmdm = b^3 : b^3m^3$

Das ist:

1. Wenn in zwoen Proportionen das zweyte Glied der ersten mit dem ersten der zweyten, und das vierte Glied der ersten mit den dritten der zweyten einerley ist, so verhält sich das erste Glied der ersten Proportion zum zweyten der zweyten, wie das dritte Glied der ersten zum vierten der zweyten Proportion.

2. Wenn in zwoen Portionen das zweyte Glied der ersten mit dem ersten der zweyten, und das dritte der ersten mit dem vierten der zweyten einerley ist, so verhält sich das erste der ersten zum zweyten

ten der andern, wie das dritte Glied der zweyten Proportion zum vierten der ersten.

3. Wenn man von mehreren Proportionen alle erste Glieder, darnach alle zweyte, sodann alle dritte und endlich alle vierte miteinander multiplicieret, so werden diese vier Producte in einer Proportion stehen.

4. Wenn alle erste Glieder ähnlicher Verhältnisse, ingleichen alle zweyte miteinander multipliciert werden, so verhalten sich diese Producte gegen einander wie die Potenzen der Glieder von einer ähnlichen Verhältniß, derer Exponent der Zahl selber Verhältniße gleich ist.

z. B. Wenn die Producte aus den Gliedern zwoer Verhältnisse entstanden sind, verhalten sie sich gegen einander wie die Quadrate der Glieder einer jeden solchen oder ähnlicher Verhältnisse. Wenn sie aber aus dreyen entstanden sind, wie die Kubi selber Glieder ꝛc.

§. 182. Wir werden durch die nämliche Prüfung (§ 179) auch sehen, daß überhaupt folgende Proportionen richtig seyn. 3.

1. $a : am = ac : amc = \frac{a}{c} : \frac{am}{c}$

2. Wenn $a : am = b : bm$

so ist auch $(a - b) : (am - bm) = a : am = b : bm$

und $(a + b) : (am + bm) = a : am = b : bm$

3. Man gebe $a : am$

$b : bm$

$c : cm$ &c.

so ist $a + b + c$ &c. $: am + bm + cm$ &c.

$= a : am = b : bm = c : cm$ &c.

4. Weil $a : am = am : am^2$

so ist auch $a ; am^2 = a^2 ; a^2m^2$

5. Weil

5. Weil $a : am = am : am^2 = am^2 am^3$
so ist auch $a^2 : a^2m^2 = am : am^3 = a : am^2$

§. 183. Mit Worten werden diese Formeln also ausgedrückt:

1. Wenn man so wohl das vorangehende als folgende Glied einer Verhältniß mit was immer für einer Größe multiplicieret, oder damit dividieret, werden die Producte, oder Quotienten, die nämliche Verhältniß haben, die zwischen diesen Gliedern war.

2. Wenn man zwoer ähnlicher Verhältnisse vorgehende Glieder zu den vorgehenden, und folgende zu den folgenden addieret (oder davon subtrahieret) wird die Summe (oder Differenz) der vorangehenden zur Summe oder Differenz der folgenden sich wie das vorgehende Glied einer jeder dieser Verhältnisse zu seinem folgenden verhalten.

3. Man mag die vorgehende Glieder so vieler ähnlicher Verhältnisse als man, will zu einander, und die folgende zu den folgenden addieren, so verhält sich die Summe der vorgehenden zur Summe der folgenden, wie jeder selber Verhältnisse vorangehendes Glied sich zum folgenden verhält.

4. In der stetigen Verhältniß verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrate des mittlern.

5. Wenn man vier verschiedne Glieder einer stetigen Verhältniß giebt, so verhält sich das Quadrat des ersten zum Quadrate des zweyten wie das zweyte Glied zum vierten, oder wie das erste zum dritten.

§. 184. Aus der ersten Formel (§ 182) $a : am = ac : amc$
3. folget auch, es sey $abcd : bcde = a : e$. Das ist: In einer Proportion von was immer für Größen (es mögen derer seyn, so viel man will) ist das Product aus allen ineinander außer der letzten zum Producte aus allen außer der ersten, wie die erste zur letzten.

Nun

Nun wollen wir noch einige Aufgaben beysetzen, die man ohne Kenntniß und Gebrauche der Proportion nicht auflösen könnte.

§. 185. Zu drey gegebnen Größen die vierte geo- A. metrische Proportionalgröße zu finden.

Nennen wir die gegebnen Größen a, b, c; die gesuch- a.b. te x, so ist vermöge der Aufgabe $a : b = c : x$

also $a\,x = b\,c$ (§ 175)

$$x = \frac{b\,c}{a}$$

Das ist: Multipliciere die dritte Größe und zweyte miteinander, und das Product dividiere mit der ersten, so ist der Quotient die gesuchte Zahl.

Dieß ist die bekannte Regel Detri, die man auch wegen ihrem fürtreflichen Gebrauche Regula aurea, oder die goldene Regel nennt: man muß aber schon vorhin wissen, ob zwischen den gegebnen Größen und der gesuchten ein geometrische Proportion statt habe oder nicht.

Es seyn z. B. gegeben die Zahlen 3, 5, 20; man verlangt die vierte Proportionalzahl: so multipliciere 20 mit 5, das Product 100 dividiere durch 3, so ist der Quotient $33\frac{1}{3}$ die gesuchte Zahl.

§. 186. Manche machen aus der Regel Detri zwo Regeln, und heissen eine die gerade, die andere die verkehrte; es kömmt aber nur auf die Bestimmung des ersten Gliedes an, so hat man an der jetzt angeführten Regel keine Aenderung zu machen, dazu bedienet euch folgender Regel: Wenn eine der gegebnen Größen mit der andern, auf die man sie bezieht, wächst oder mit ihr abnimmt, so ist jene die erste, welche mit der, von der man fragt, gleichnamig ist, das ist, welche eben solche Einheiten bedeutet als sie: wenn aber die gegebne Zahl wächst, da die andere, auf die man sie beziehet, abnimmt; oder abnimmt, da die andere wächst, so ist die die erste, welche in die Frage kömmt.

z. B. Es sey gegeben diese Aufgabe: 3 Ellen Zeug kosten 5 fl; was kosten 20 Ellen? Ich frage von den 20 Ellen; 3 Ellen ist damit gleichnahmig: nun mit der Waare wächst ihr Werth, also 3 Ellen ist das erste Glied. Wenn man aber folgende Aufgabe giebt: 6 Arbeiter werden innerhalb 20 Tagen mit einer gewissen Arbeit fertig, wie lange brauchen 10 Arbeiter um selbes zu vollenden. Hier werden die 6 Arbeiter auf die 20 Tage bezogen, nun nimmt die Zeit ab, wenn die Zahl der Arbeiter wächst; also ist das erste Glied die 10 Arbeiter. Wieder, man sagt: 6 Arbeiter werden innerhalb 20 Tagen mit einer Arbeit fertig, wie viel hab ich Arbeiter nöthig, um in 12 Tagen damit fertig zu werden? Hier ist das erste Glied 12 Tage. Welche Zahl man für das zweyte, welche für das dritte Glied nehmen will, ist gleichgültig.

A. §. 187. Einen jeden gegebnen Bruch in einen andern gleichgültigen von einem gegebnen Nenner zu verwandeln.

a. Es sey der Zähler des gegebnen $= a$, der Nenner $= b$, der Zähler des andern $= x$, sein Nenner $= c$; so ist dann $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ oder $a : b = x : c$, folglich auch $b : a = c : x$ (§ 178, 5): also kann man x durch die Regel Detri finden. z. B. Es sey $a = 2$, $b = 3$, $c = 15$, so ist $x = 10$.

A. §. 188. Man giebt die Tagreise $= a$ eines Bothens A, und die Tagreise $= b$ eines andern B; dieser letztere sey um die Zeit $= c$ später abgegangen den ersten einzuholen: man soll die Zeit x finden, da er ihn erreicht.

a. Weil man setzt daß sie gleichförmig fortgehen, und also der gemachte Weg der Zeit proportional sey, so ist der in der Zeit c von dem Bothen A hinterlegte Weg $= ac$, und der, den er noch zu machen hat, bis ihn der Both B antrift, $= ax$; der Weg aber, den der Both B machen muß, bis er den Bothen A erreicht, ist $= bx$: weil dann, wenn sie zusammen kommen, beyde den nämlichen Weg müssen gemacht haben, so ist

$$\frac{ac + ax = bx}{ac = bx - ax = (b-a)x}$$

$$\frac{ac}{b-a} = x$$

Es sey nun z. B. a = 6 Meilen; b = 8 Meilen; c = 4 Tage; so ist ac = 6 × 4 = 24 Meilen; b — a = 8 — 6 = 2; also ac : b — a = 24 : 2 = 12. Also nach 12 Tagen kommen diese Bothen zusammen.

§. 189. Man giebt die Tagreise = a eines Bothens A, und von seiner Abreise her verfloßne Zeit = b; man soll die Tagreise = x eines zweyten Bothens B bestimmen, der den ersten A in einer gegebnen Zeit = c erreiche. A.

Man sieht wohl, daß hier der von dem Bothen A, da man den Bothen B ihm nachschickt, schon hinterlegte Weg = ab, und der, den er noch hinterlegen wird, bis ihn der andere einholt, = a; und der, den der Both B machen muß, cx sey: weil nun beyde, so bald sie zusammen kommen, den nämlichen Weg gemacht haben, so ist a.

$$\frac{ab + ac = cx}{\frac{ab + ac}{c} = \frac{ab + a}{c} = x}$$

Es sey wiederum a = 6 Meilen, b = 12 Tage; so ist ab = 24, und ab : c = 24 : 12 = 2 : also (ab : c) + a = 2 + 6 = 8 : also wenn der Both B den andern A innerhalb 12 Tagen erreichen will, muß er des Tags 8 Meilen machen.

§. 190. Man giebt den Werth einer Maaß von besserem Weine = a und den von schlechterm = b, und den vom vermischten aus beyden = c; zu finden, wie viele Maaße schlechten Wein man unter die Maaße d von bessern mischen soll, daß der vermischte vom gegebnen Werthe sey. Q.

Wir

a.d. Wir wollen die Zahl Maße schlechten Weines, die man sucht, x nennen, so ist klar, daß der Werth des besseren Weins da, und des schlechtern bx, und also des gemischten da+dx sey; da nun der gemischte d+x, und sein Werth (d+x) c oder dc+cx ist, so ist

$$da+bx = dc+cx$$

$$da-dc = cx-bx = (c-b)x$$

$$\frac{da-dc}{c-b} = \frac{(a-c)d}{c-b} = x$$

Es sey nun a = 16 Kreutzer, b = 10 Kr., c = 12 Kr., d = 20 Maße; so ist a — c = 4, und (a—c) d = 4 X 20 = 80, c — b = 2: also x = 80; 2 = 40 Maaße.

Wenn man statt des schlechtern Weins Wasser nimmt, so ist b = 0 und die vorige Formel wird in diese verändert $\frac{(a-c)\,d}{c} = x$. Und wenn der Werth der Buchstaben der vorige bleibt, so ist x = 80 : 12 = $6\frac{8}{12}$ = $6\frac{2}{3}$ Maße Wasser.

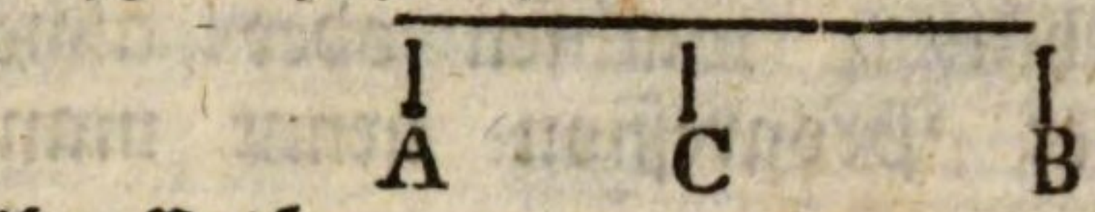
A. §. 191. Drey Personen A, B und C legen eine Summe Gulden = a zusammen, B giebt dazu her eine Zahl Gulden = b, und C eine Zahl = c; nun gewinnen sie damit eine Summe = d: wie viel gehört jeder Person von diesem gemeinschaftlichen Gewinne?

a.b. Weil der Gewinn eines jeden nach Proportion seines Beytrages zur allgemeinen Summe ist; so ist, wenn wir den Gewinn der Person A = x, den Gewinn der Person B = y, und der Person c = z nehmen (§ 182)

(a+b+c) : d = a : x = b : y = c : z. Also findt man den Gewinn jeder Person, wenn man die Regel Detri so vielmal, als Personen in der Gesellschaft sind, nämlich dreymal anwendet, und dieß heißt man die Gesellschaftsregel. Es sey a = 1000, b = 500, c = 300; so ist die Summe des zusammengelegten Geldes = 1800. Es sey ferner d = 2000; so findt man x = 1111 $\frac{2}{18}$, y =

$555\frac{10}{18}$, z = $333\frac{6}{18}$, derer Summe = 2000 = d ein Zeichen ist, daß man recht gerechnet habe.

§. 192. Man lehrt in der Physik, es habe an einem Hebel AB, an den zwey Gewichter A und B angehengt sind, das Gleichgewicht statt,



wenn ihre Entfernungen von dem Ruhepuncte C, da der Hebel aufliegt, in verkehrter Verhältniß ihrer Schweren sind.

Nun giebt man zweene schwere Körper M und N, einer hängt an A, der andere an B an den Enden eines Hebels, dessen Schwere unmerklich ist, und die Länge des Hebels = a ist gegeben, auch die Schwere des Körpers M = m und des Körpers N = n: man soll den Punct C bestimmen, wo man den Hebel unterstützen muß, oder A C = x finden. A

Hier ist CB = AB — AC = a — x; die gerade a. b. Verhältniß der Gewichter m : n also die verkehrte n : m; folglich

$$x : a - x = n : m$$

$$mx = an - nx$$

$$mx + nx = (m+n)x = an$$

$$x = \frac{an}{m+n}$$

Es sey nun a = 9 Zoll, m = 3 Pfund n = 2 Pfund; so ist an = 9. 2 = 18, m+n = 5, x = an : (m+n) = 18 : 5 = $3\frac{3}{5}$ Zoll.

VIII. Von den geometrischen Progreßionen, und Logarithmen.

E. §. 193. Eine geometrische Progreßion ist eine Reihe von Größen, die nach der nämlichen geometrischen Verhältniß wachsen oder abnehmen. Die Theile der Progreßion nennt man ihre Glieder.

z. B. 1. 10. 100. 1000 ꝛc. oder 1. 2. 4. 8. 16. 42 ꝛc. Wiederum $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$ ꝛc. oder 32 16. 8. 4. 2. 1. Die allgemeine Formel einer wachsenden Progreßion, wenn der Name der Verhältniß m für keinen ächten Bruch gilt, ist diese:

$a. am. am^2. am^3. am^4$ oder $\frac{a}{m^3} \cdot \frac{a}{m^2} \cdot \frac{a}{m} \cdot a:$ $am. am^2. am^3.$

Einer abnehmenden diese.

$am^3. am^2. am. a. \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m^2} \frac{a}{m^3} \cdot$ ꝛc.

oder $am^3. am^2. am. a. am^{-2}. am^{-3}.$

B. Wenn in der ersten Reihe m so wohl für ächte als unächte Brüche und ganze Zahlen genommen wird, so stellet sie alle so wohl wachsende als abnehmende Progreßionen vor.

E. §. 194. Aus diesen Formeln erhellet, daß die Exponenten der Potenzen des gemeinen Verhältnißexponenten m, welche als Mitfactoren an allen Gliedern hangen, eine arithmetische Progreßion machen.

Es ſind nämlich ſelbe in der erſten wachſenden m^0, m^1, m^2, m^3 &c.

oder $\frac{1}{m^0}, \frac{1}{m^1}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}$ &c.

in der abnehmenden $m^3, m^2, m^1, m^0, m^{-1}, m^{-2}, m^{-3}$ &c.

Daß $a = am^0$, und $am = am^1$ iſt aus dem § 138 abzunehmen, weil $m^0 = m : m = 1$, und $m^1 = m^2 : m = m$ iſt.

§. 195. Man muß hier den Exponenten der Verhältniß, und den Exponenten der Potenz dieſes Exponenten nicht miteinander vermiſchen: m iſt der allen Gliedern gemeine Exponent der Verhältniß zwiſchen jeden zweyen neben einander ſtehenden Gliedern (§ 161): Nun dieſer hat auch einen Exponenten, nämlich den Exponenten ſeiner Potenz (§ 101) alſo z. B. iſt $m = m^{+1}$, das iſt, m hat zum Exponenten einer Potenz +1. Es beſtehen aber alle Glieder aus a, und einer Potenz von m als ihrem Mitfactor. z. B. am^3 beſtehet aus a und der dritten Potenz von m.

§. 196. Man ſieht auch, daß eine geometriſche Progreßion eine Reihe ähnlicher Verhältniſſe ſey (§ 162.) z.

Denn es iſt $a : am = am : am^2 = am^2 : am^3$ &c.

§. 197. Wenn man ferner die allgemeine Formel bedachtſam überſieht, wird man auch bemerken, daß jedes Glied das Product aus dem erſten a, und dem zur Potenz, welche die Zahl der vorangehenden Glieder andeutet, erhobnen gemeinſchaftlichen Verhältnißexponenten m ſey. z.

z. B. In der Reihe die von a anfängt, ist am^4 das fünfte Glied, indem m zur vierten Potenz erhoben ist, weil 4 Glieder vorangehen. Eben so, wenn man am^2 für das erste Glied nimmt, ist am^5 das vierte, welches aus $am^2 \times m^3$ besteht (§ 137), weil 3 Glieder vorangehen. Und wenn das erste Glied am^{-2} ist, ist das fünfte am^{-2}, denn $m^{-2} \times m^{+4}$ ist $= m^2$.

z. §. 198. Wenn also a das erste Glied, m den Verhältnißexponenten, n die Zahl der Glieder bedeutet, so ist am^{n-1} das letzte Glied.

z. B. Wenn die Progreßion nur fünf Glieder hat, so ist $n - 1 = 4$, folglich das letzte Glied am^4.

l. §. 199. In einer geometrischen Progreßion ist das Product der äußersten Glieder dem Producte jeder Zweyer, die von den äußersten gleichweit abstehen, wie auch dem Quadrate des mittlern Gliedes, wenn ihr Zahl ungerade ist, gleich.

b. Setzen wir nun in der allgemeinen Formel der geometrischen Progreßionen jede zwey von den äussersten gleichweit entfernete untereinander, und multiplicieren sie miteinander, so wird sich die Wahrheit dieses Satzes gleich selbst zeigen.

$a . am . am^2 . am^3 . am^4 . am^5$ gerade Zahl der
$am^2 \quad am \quad a$ Glieder.

Producte a^2m^5, a^2m^5, a^2m^5

$a . am . am^2 . am^3 . am^4$ ungerade Zahl der
$am^2 . am . a$ Glieder.

$a^2m^4 . a^2m^4 . a^2m^4$

l. §. 200. In jeder geometrischen Progreßion verhält sich die Summe aller Glieder ohne

das

das letzte zur Summe aller Glieder ohne das erste, wie jedes vorgehende zum nächstfolgenden. Denn jede geometrische Progreßion ist eine Reihe B. ähnlicher Verhältniße (§ 196): also verhält sich darinnen die Summe aller vorgehenden Glieder, nämlich aller außer dem letzten, zur Summe aller folgenden, nämlich aller außer dem ersten, wie jedes vorangehende zu seinem folgenden Verhältnißgliede, (§ 182, 3) nämlich zum nächsten Gliede in der Progreßion.

Zur Erläuterung wollen wir nur 4 Glieder herſetzen.

$$\begin{array}{l} a : am \\ am : am^2 \\ am^2 : am^3 \end{array}$$

also ist $a+am+am^2 : am+am^2+am^3 = a : am = am : am^2$ &c. (§ 182, 3)

§. 201. Es sey die Summe aller Glieder = S, das letzte Glied = Z, das erste = a, der Exponent = m; so ist $S-Z : S-a = a : am = 1 : m$ das ist: in einer geometrischen Progreßion verhält sich die Summe aller Glieder ohne das letzte zur Summe aller Glieder ohne das erste, wie die Einheit zum Exponenten. 3.

§. 202. Also ist $(S-Z) \times m = (S-a) \times 1$

oder $Sm - Zm = S - a$

folglich $Sm - S = Zm - a$

oder $(m-1)S =$

also $S = \frac{Zm-a}{m-1}$

§. 202. Also wenn das erste Glied a, und das letzte z, und der Verhältnißexponent m gegeben sind, kann man die Summe der ganzen Progreßion finden, ohne daß uns die Zahl der Glieder unmittelbar bekannt seye, 3.

nämlich man multipliciere das lezte Glied z mit dem Exponenten m; von dem daraus entstehenden Producte subtrahiere man das erste Glied, und den Rest dividiere man mit dem um Eins verminderten Exponenten; so ist der Quotient die Summe aller Glieder.

§. §. 203. Weil $z = am^{n-1}$ ist (§ 198), so wird die Formel des vorigen § in diese verwandelt,

$$S = \frac{am^n - a}{m-1}$$

: also wird doch die Summe aller Glieder, ohne daß die Zahl derselben mittel- oder unmittelbar gegeben sey, nicht bekannt.

§. 204. Um m geschwinder zur Potenz n—1 zu erheben, wenn etwa diese ziemlich hoch ist, kann man sich der Multiplication zweyer Potenzen in einander (§ 137) bedienen. z. B. gesetzt n sey 7 also $n-1 = 6$; erhebet m zur dritten Potenz, und diese darnach zu ihrem Quadrate, so ist m zur sechsten Potenz erhoben: aber noch viel leichter geschieht dieses durch die Logarithmen, wie wir im künftigen § 209 ꝛc. sehen werden.

§. §. 205. Wenn man eine arithmetische Progreßion unter eine geometrische Glied für Glied anschreibt, so werden die Glieder der arithmetischen die Logarithmen der über ihnen stehenden Glieder der geometrischen Progreßion genennt.

Es sey eine Geom. Progr. 2. 4. 8. 16. 32. 64
eine arithmethische 1. 3. 6. 9. 12. 15

so ist in diesen zweyen Progreßionen 6 der Logarithmus von 8. eben so 12 der Logarithmus von 32, ꝛc.

oder es sey die geom. Progr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64
die arithmetische 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6

so ist in diesen Progreßionen 3 der Logarithmus von 8, und 5 der Logarithmus von 32.

All-

Allgemein ist die geometrische Progreßion

	am^0,	am^1,	am^2,	am^3,	am^4,	am^5
die arithmetische	b,	b+d,	b+2d,	b+3d,	b+4d,	b+5d

§. 206. Selbst die Exponenten der Po- 3.
tenz des Verhältnißexponenten jeder Glieder in der geometrischen Progreßion, sind die Logorithmen dieser Glieder, weil sie eine arithmetische Progreßion machen (§ 193) deren Glieder mit den Gliedern der geometrischen fortlaufen: denn wie ihr hier seht, sie sind die natürliche Zahlen Ordnung 0, 1, 2 ꝛc.

§. 207. Wenn wir in der allgemeinen Formel 3.
$a = 1$, und $b = 0$ machen, so entsteht diese daraus:

$1 . m^1 . m^2 . m^3 . m^4 . m^5$ &c

$0 . 1d . 2d . 3d . 4d . 5d$ &c.

da sehen wir, daß jedes Glied der arithmetischen Progreßion eine Summe von so viel d ist, als vielmal in dem ober ihm stehenden Gliede der geometrischen Progreßion m als Mitfactor stehet.

z. B. Das dritte Glied in der arithmetischen ist eine Summe von 4d, und in der geometrischen ein Product, darinen m viermal als Factor enthalten ist.

§. 208. Wenn der Logarithmus von 1 Nulle 3.
ist, ist die Summe der Logarithmen, die den Factoren zugehören, dem Logarithmus des Productes gleich, und die Differenz zwischen dem Logarithmus des Divisors, und des Dividendus ist der Logarithmus des Quotienten.

z. B. Es seyn die Factoren m^2 und m^3, so ist ihr Product m^5 (§ 137): die Logarithmen aber dieser Factoren sind 2d und 3d, und ihre Summe $= 5d$, und eben 5d ist der Logarithmus von m^5. Entgegen wen m^5 durch m^3 soll dividieret werden, ist der Quotient m^2 (§ 138); wenn

man

man aber den Logarithmus des Divisors m^3, nämlich 3d, von 5d dem Logarithmus des Dividendus m^5 abzieht, ist der Rest 2d der Logarithmus des Quotienten m^2.

B. §. 209. Weil das Quadrat ein Product aus der mit sich selbst multiplicierten Wurzel ist, oder aus gleichen Factoren, so wird (wenn o der Logarithmus von 1 ist), wenn man den Logarithmus der Wurzel verdoppelt, was heraus kömmt, der Logarithmus des Quadrates seyn. Und verkehrt wenn man den Logarithmus eines Quadrates halbieret, bekömmt man den Logarithmus der Wurzel.

z. B. Gesetzt ich will m^3 zur zweyten Potenz erhöhen, so bekomme ich m^6, und m^3 ist die Quadratwurzel von m^6 (§ 140). Nun ist 3d in der § 207 angeführten Progreßion der Logarithmus von m^3, und wenn ich diesen verdoppele, so erhalte ich 6d den Logarithmus von m^6, dem Quadrate nämlich von m^3. Entgegen wenn ich 6d den Logarithmus von m^6 halbiere, erhalte ich 3d den Logarithmus von m^3 nämlich der Quadratwurzel von m^6.

Z. §. 210. Ja, weil jede höhere Potenz einer gegebnen Größe erzeuget wird, wenn man den Exponenten derselben mit dem Exponenten der Potenz, zu der man sie erheben will, multiplicieret (§ 140) so findt man auch den Logarithmus einer jeden Potenz, und jeder Größe, als einer Wurzel, wenn man ihren Logarithmus durch den Logarithmus des Exponenten der Potenz multiplicieret, zu der sie soll erhoben werden. Und entgegen erhält man den Logarithmus der Wurzel einer Potenz, wenn man den Logarithmus derselben mit dem Exponenten der Wurzel, die man sucht, dividieret.

z. B. Weil der Kubus die dritte Potenz iſt, ſo erhalte ich den Logarithmus des Kubus einer gegebnen Potenz oder Größe m^2, wenn ich dieſer ihren Logarithmus 2d mit 3 multipliciere, und ſehe, was für eine Potenz oder Größe ober dieſem neuen Logarithmus 6d ſtehe, nämlich m^6. Und entgegen wenn ich 6d den Logarithmus von m^6 mit 3 dividiere, ſo bekomme ich 2d den Logarithmus der Kubikwurzel von m^6, und weil ober ihm m^3 ſtehet, ſo ſehe ich daß m^3 die Kubikwurzel von m^6 ſey.

§. 211. Alſo wird durch die Logarithmen das 3. Multiplicieren in ein Addieren derſelben, das Dividieren in Subtrahieren, das Erheben der Größen zu einer Potenz in eine Multiplication der Logarithmen durch den Exponenten, und das Wurzelausziehen in eine Diviſion derſelben durch den Exponenten verwandelt.

§. 212. Wenn der Logarithmus von Eins 3. Nulle iſt, und 1 der Logarithmus von 10, ſo iſt 2 der Logarithmus von 100, und 3 der Logarithmus von 1000 ꝛc. (§ 193 und § 164), wie man leicht ſieht, wenn man die Progreßionen unter einander ſchreibt

geometriſche Progreßion, 1, 10, 100, 1000, 10000
arithmetiſche Progreß. 0, 1, 2, 3, 4

dieſe Art Logarithmen mit den daraus für die dazwiſchen fallende Zahlen hergeleiteten heißt man die Tabulärlogarithmen, und dieſe verſteht man auch insgemein, wenn man Logarithmen der Zahlen ohne Beyſatz, und ausdrückliche Meldung von andern redet.

§. 213. Weil es zwiſchen 0 und 1, und eben 3. ſo zwiſchen 1 und 2 ꝛc. keine ganze Zahl giebt, und 0 der Tabulärlogarithmus von 1, 1 der Tabulärlogarithmus von 10, und 2 von 100 ꝛc. iſt, ſo iſt es klar, daß ſich die Tabulärlogarithmen der Zahlen zwiſchen 1 und 10, und eben ſo zwiſchen 10 und 100 ꝛc.

durch

durch ganze Zahlen nicht lassen ausdrücken, sie müssen also gebrochne seyn, nämlich die zwischen 1 und 10 müssen für ihren Logarithmus 0, und einen beygesetzten Bruch; die zwischen 10 und 100 müssen 1 mit einem Bruche; und die zwischen 100 und 100 müssen 3 + einen Bruch für ihre Logarithmen haben.

§. 214. Man hat befunden, daß die Decimalbrüche von einer bestimmten Zahl Ziffern dazu am bequemsten dienen. Es müßte zwar diese Zahl, wenn der Logarithmus vollkommen wäre, unendlich groß seyn, doch flecken zum Gebrauche die Logarithmen von einer bestimmten Zahl Ziffern, welche den wahren so nahe kommen, daß es für unsere Berechnungen eben so viel ist, als ob wir die wahren hätten. In den größten Tabellen kommen nach der ganzen Zahl, die man die Charakteristika nennet, noch zehen Ziffern; in kleinern Tabellen nur sieben oder noch weniger, die größten Tabellen gehen bis 102100 die gemeinsten gemeiniglich nur bis 10000 und einige gar nur bis auf 1000. Ich henge diesem Buche eine kleine Tabelle von 1 bis auf 180 nur mit 4 Decimalziffern bey, damit sich die Anfänger doch damit üben können, und also mit den Logarithmen umzugehen lernen. Eine von Fehlern gereinigte Logarithmentabelle von gemeiner Art hat der Freyherr Christian Wolf zu Halle im Jahre 1711, und Jakob Heinsche im Jahre 1757 zu Frankfurth und Leipzig zum Drucke befördert: wir haben auch hier eine, die aber in den gemeinen Zahlen nur bis auf 1000 geht.

3. §. 215. Also nur der Einheit und Hauptzahlen 1. 10. 100. 1000 ꝛc. Logarithmen sind rein und vollkommen, und bestehen aus der Charakteristika allein ohne beygesetzten Decimalbruch, und zwar besteht immer diese Charakteristika aus so viel Einheiten, als die Hauptzahlen Nullen haben: es sind nämlich

die Hauptzahlen 1 . 10 . 100 . 1000 ꝛc.
ihre Logarithmen 0.0000. 1.0000. 2.0000. 3.0000 ꝛc.

§. 216.

§. 216. Und weil der Logarithmus eines Pro- 3.
ductes die Summe der Logarithmen seiner Factorn ist, so hat jede Zahl außer der Charakteristika einerley Logarithmus mit dem Producte aus ihr in eine Hauptzahl.

z. B. 12, und 120, haben außer der Charakteristika den nämlichen Logarithmus; nämlich der Logarithmus von 12, wie wir ihn in der beygeführten Tabelle finden, ist 1, 0792, und der Logarithmus von 120 ist 2. 0792, und dieser ist von dem vorigen nur in der Charakteristika unterschieden, und aus ihr entstanden, denn wenn man 12 mit 10 multiplicieret, bekömmt man 120, folglich wenn man der ersten Zahl Logarithmus 1. 0792 zum Logarithmus der andern 1, 0000 addiert, wird die Summe 2. 0792 des Productes 120 Logarithmus seyn (§ 208.)

§. 217. Da dann zwo Zahlen, derer eine nicht .3
wenigst zehenmal größer ist als die andere, einerley Charakteristika haben, (§ 312) und die Logarithmen der Ziffern unter zehn für ihre Charakteristika 0, haben, (denn 10 ist die erste Zahl, deren Charakteristika 1 ist) (§ 215), so muß jede Zahl um eine Ziffer mehr haben, als die Charakteristika des ihr gehörigen Logarithmus Einheiten hat.

z. B. Von 12 ist der Logarithmus 1. 0792, von 123 ist der Logarithmus 2, 0899, die erste Zahl hat zwo, die andere drey Ziffern und der ersten Logarithmus hat die Charakteristika 1. der andere 2. Wie man aber die Logarithmen für alle Zahlen die zwischen die Hauptzahlen fallen, habe finden können, wird man aus folgender Aufgabe abnehmen.

§. 218. Für jede Ziffer zwischen 1 und 10. A.
z. B. für 9 den gehörigen Logarithmus mit einer bestimmten Zahl Decimalziffern zu finden.

1. Suche zwischen 0 und 1 die mittlere arith- 1.
metische Proportionalzahl mit so viel Nullen als man verlangt. z. B. mit 4, nämlich die mit-

lere

lere zwischen 0, 0000 und 1, 0000 (§ 168); du wirst finden daß es die Zahl 0, 5000 sey: nun suche auch zwischen 1 und 10 mit eben so viel Decimalziffern, oder zwischen 1, 0000 und 10, 0000 die mittlere geometrische Proportionalzahl (§ 177) nämlich 3, 1623, so ist die vorige der Logarithmus von dieser. (§ 209)

Wir wollen die Zahl 1 oder 1, 0000 A, und 10 oder 10, 0000 B, und die mittlere geometrische Proportionalzahl 3, 1623 C heissen.

2. Nun sieh, zwischen was für eine unter den drey Zahlen A, B und C die Zahl 9 oder 9, 0000 falle; du wirst gleich merken, daß noch C zu klein sey, daß sie also zwischen C und B falle: so suche dann zwischen C und B die mittlere geometrische Proportionalzahl (5, 6234), (wir wollen diese D heissen,) und auch die mittlere arithmetische (0,7500) zwischen dem Logarithmen von C und B, nämlich zwischen 0, 5000 und 1, 0000, so ist diese der Logarithmus von D.

3. Weil 9 oder 9, 0000 zwischen D und B oder zwischen 5, 6234 und 10, 000 fällt, so suche zwischen diesen zwoen die mittlere geometrische Proportionalzahl E (7, 4989) und zwischen den Logarithmen von D und B die mittlere arithmetische Proportionalzahl (0, 8750) als den Logarithmus von E. Und so fahr immer fort die mitlere geometrische Proportionalzahl zwischen den zwoen, zwischen welche die Zahl fällt, und den ihr gehörigen Logarithmus zu suchen, bis endlich diese mittlere geometrische Proportionalzahl 9, 0000 ist, so wird auch ihr Logarithmus, welcher 0, 9542 seyn wird, in den vier Decimalziffern richtig seyn.

§. 219. Es war in der That keine geringe Arbeit auf diese Weise die Tabulärlogarithmen auch nur der einzigen Zahl 9 mit 10 oder 11 Decimalziffern zu suchen: wenn man auch nur bis auf vier geht, so hat man doch achtzehenmal die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwo andern zu suchen, bis endlich 9, 0000 heraus kömmt, nun mit mehr Decimalziffern oder Nullen muß sie noch öfter, z. B. mit sieben schon fünf und zwanzigmal gesucht werden, und jede dieser Proportionalzahlen insonderheit ist auch desto mühesamer zu suchen jemehr Decimalziffern man ihnen giebt, weil theils das Multiplicieren so langer Zahlen miteinander, theils das Quadratwurzelausziehen aus dem Producte dadurch desto beschwerlicher wird: Nun gleichwie man der Zahl 9 ihren Logarithmus, so hat man auch der übrigen ersten Zahlen zwischen 1 und 10 ihre Logarithmen finden können, hatte man diese, so hatte man mit Aenderung der Charakteristika auch die Logarithmen von 10, 20, 30 ꝛc. bis 100. darnach mußten auch für die zwischen diese fallende Zahlen eben auf die Weise, wie die Logarithmen der ersten Zahlen gesucht werden. Dabey gab es freylich viele Abkürzungen dieser Arbeit, die hier anzuführen zu weitläufig und unnöthig ist, doch war die Arbeit noch groß genug. Danken wir Gott, und denen, die also für uns gearbeitet haben, und seyn wir froh, daß wir uns dieser ihrer Arbeit ohne unsere Mühe bedienen können, denn, wie wir in der Trigonometrie und anderswo sehen werden, die Logarithmen thun fürtreffliche Dienste, und wir ersparen in unsern Berechnungen viele Arbeit und Zeit damit.

§. 220. Zu dreyen gegebnen Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl durch Logarithmen zu suchen. A.

1. Suche die Logarithmen der gegebnen Zahlen in den Tabellen auf, und addiere den Logarithmus der dritten und der mittlern in eine Summe zusammen. a.

2. Von dieser Summe subtrahiere den Logarithmus der ersten Zahl, und die Differenz ist der Logarithmus der gesuchten vierten Zahl.

3. Die

3. Die dazu gehörige Zahl suche in den Tabellen, oder wenn der gefundne Logarithmus nicht ganz darinnen steht, so nimm den, der ihm am nächsten kömmt, dafür an, und die ihm respondierende Zahl wird bey nahe die gesuchte seyn.

§. Denn durch die Logarithmen wird das Multiplicieren der mitlern und dritten Zahl in einander in eine Addition ihrer Logarithmen und das Dividieren des Productes durch die erste (§ 185) in ein Subtrahieren ihres Logarithmus von der Summe der andern (§ 211) verwandelt: also findt man auf diese Weise wie durch die Regel Detri endlich die gesuchte Zahl durch ihren Logarithmus, den man zuvor findt.

z.B. Es seyn gegeben die Zahlen 3, 5, 7; so ist

von 5 der Logarithmus	0.6990
von 7 der Logar.	0.8451
die Summe	1.5441
von 3 der Logar.	0.4771
Differenz	1.0670

Nun wenn ich diesen Logarithmus in der Tabelle suche, finde ich ihn nicht, ich sehe aber er sey gröser als 1.0410 der Logarithmus von 11, und kleiner als 1.0792 der Logarithmus von 12, daraus nehme ich ab, die gesuchte Zahl falle zwischen 11 und 12, und komme der letzten näher als der ersten, ich kann also, wenn ich sie nicht genauer zu wissen nöthig habe, 12 dafür gelten lassen.

§. 221. Wenn du aber damit nicht willst zufrieden seyn, sondern durch angehengte Decimalbrüche dich der gesuchten Zahl nähern willst, so suche in deinen Tabellen den nämlichen Logarithmus, was die Decimalziffer belangt, aber mit einer grösern Charakteristika, oder gar der grösten deiner Tabellen auf, und du wirst darinnen einen Logarithmus finden, der dem deinen ohne die Charakteristika näher kommt, oder gar damit einstimmt, nun die ihm respondierende Zahl laß für die gesuchte gelten, aber so viele ihrer letzten Ziffern, als um viele Einheiten dieses Logarithmus Charakteristika grösser ist als die des gefundnen, gelten für Decimalziffern, und die vorangehenden für die ganzen. z. B. aus

dem

dem vorigen Exempel such an statt 1. 0670 in deiner Tabelle 2, 0670 oder den nahe dazu kommenden unter den Logarithmen auf, und du findest den nächst kleinern 2. 0645 und den nächst grössern 2. 0682, welcher näher als der vorige zu 2. 0670 kömmt, die respondierende Zahlen sind 116 und 117, weil dann die angenommene Charakteristika 2 um Eins grösser ist, als die wahre gefundne 1, so gilt nur die letzte Ziffer für Decimaltheile, und die gesuchte Zahl fällt zwischen 11.6 und 11.7, kömmt aber der letzten näher. In grössern Tabellen fänden wir 3. 060709 mit der dazugehörigen Zahl 1167, also ist die gesuchte Zahl noch näher 11,67. Wie man aber für grössere Zahlen, als die, welche die Tabellen darstellen, die Logarithmen, und wieder wie man für grössere Logarithmen als die, welche die Tabellen enthalten, die gehörigen Zahlen finde, das wird gemeiniglich in der dabeystehenden vorläufigen Abhandlung von ihrem Gebrauche selbst darinnen erkläret, und ist ohne solche Tabellen beyhanden zu haben nicht bequem zu zeigen: darum übergehe ich es. Doch in dem Wolfischen ist dieser Unterricht nicht beygesetzt.

§. 222. Die Wurzel von was immer für einer Potenz aus einer gegebnen Zahl durch Logarithmen zu suchen. A.

1. Man suche den Logarithmus der gegebnen Zahl. a.

2. Darnach dividiere man ihn durch den Exponenten der Wurzel (§ 210); der Quotient wird der Logarithmus der Wurzel, und die ihm respondierende Zahl die Wurzel selbst seyn.

z. B. Es sey gegeben die Zahl 184, und man verlange ihre Quadratwurzel; so finde ich den Logarithmus dieser Zahl 2. 2648, wenn ich diese Zahl durch den Exponenten der Quadratwurzel nämlich durch 2 dividiere, so ist der Quotient 1. 1324, und dieser Logarithmus fällt zwischen den Logarithmus von 13, und den Logarithmus von 14, kömmt aber dem letztern näher, daraus schließe ich die Quadratwurzel von 184 sey etwas kleiner als 14. Mit der Charakteristika 2. finde ich, daß unserm Logarithmus der Logarithmus von 136 nämlich 1335 am nächsten komme, also ist die Wur-

zel

zel bey nahe 13. 6, und mit der Charakteristika 3 finde ich in grösern Tabellen den Logarithmus 3. 1325 der Zahl 1357, also noch näher ist die Wurzel 13, 57.

Gesetzt ich wollte die Kubikwurzel dieser Zahl finden, so würde ich ihren Logarithmus 2, 2648 mit dem Exponenten der Kubikwurzel nämlich mit 3 dividieren, und der Quotient 0. 7549 würde der Logarithmus der Wurzel seyn: ich würde darnach die respondierende Zahl oder gesuchte Wurzel bey nahe 6, näher 5, 7 noch näher aus grösern Tabellen 5, 688 finden.

E. §. 223. Wenn man die Charakteristika eines Tabulärlogarithmus um 10 vermehrt, heißt der also geänderte Logarithmus ein Hypothetischer; einen doppelten Hypothetischen nenne ich den, der durch die Addition zweener, und einen dreyfachen der durch dreyer einfachen hypothetischen Logarithmen Addition entstehet.

z. B. Der Tabulärlogarithmus der Zahl 6 ist 0, 7782, also ihr hypothetischer ist 10, 7782. Der Zahl 3 Tabulärlogarithmus ist 0, 4771 der hypothetische derselben 10. 4771, folglich der doppelte hypothetische von 18 ist 21, 2553, und der einfache hypothetische dieser Zahl 11, 2553, und der Tabulärlogarithmus derselben 1. 2553.

Z. §. 224. Wenn man also 10 von der Charakteristika eines einfachen hypothetischen Logarithmus, oder 20 aus der Charakteristika eines doppelten wegnimmt, so wird der Tabulärlogarithmus wieder hergestellt; wenn man aber die Charakteristika eines doppelten hypothetischen Logarithmus nur um 10 vermindert, so wird der Logarithmus ein einfacher hypothetischer.

Z. §. 225. Wenn eines Factores hypothetischer Logarithmus zu einem Tabulärlogarithmus eines andern addieret wird, so ist der Logarithmus des Productes nur ein einfacher hypothetischer Logarithmus.

z. B.

z. B. Es seyn gegeben die Factoren 7 und 6: wenn man nun zum hypothetischen der ersten Zahl nämlich zu 10, 8451 den Tabulärlogarithmus der zweyten 0, 7782 addieret, so ist die Summe 11, 6233 der einfache hypothetische Logarithmus der Zahl 42, und ihr Tabulärlogarithmus in den Tabellen ist 1, 6232, der Unterschied der letzten Ziffer darf uns nicht befremden, weil unsere Logarithmen nicht ganz vollkommen sind.

§. 226. Wenn man von dem hypothetischen Logarithmus des Dividendus den Tabulärlogarithmus des Divisors abzieht, so ist der Logarithmus des Quotienten hypothetisch; wenn man aber von dem hypothetischen Logarithmus des Dividendus den hypothetischen des Divisors abzieht, so ist der Logarithmus des Quotienten nur ein Tabulärlogarithmus. §.

z. B. Es sey der Dividendus 42, dessen hypothetischer Logarithmus 11, 6237 ist: wenn man davon den hypothetischen 10, 8451 der Zahl 7 subtrahieret, so ist die Differenz 0, 7781 der Tabulärlogarithmus von 6; wenn man aber den Tabulärlogarithmus 0, 8451 der Zahl 7, von 11, 6232 dem hypothetischen der Zahl 42 abzieht, so ist die Differenz 10, 7781 der hypothetische Logarithmus des Quotienten 6.

§. 227. Also findt man eines jeden so wohl ächten als unächten Bruches hypothetischen Logarithmus, wenn man des Nenners Tabulärlogarithmus von dem hypothetischen des Zählers abzieht. §.

z. B. Es sey gegeben der Bruch $\frac{2}{11}$, so ist des Zählers hypothetischer Logarithmus 10. 3010, des Nenners Tabulärlogarithmus 1,0414, die Differenz; also 9. 2596 ist der hypothetische Logarithmus dieses Bruches. Wenn der Nenner zehen, oder über zehen Ziffern mehr hätte als der Zähler müßte man für den Zähler sich eines hypothetischen Logarithmus von höherem Grade, dessen Charakteristika nämlich mit 100 über die Tabuläre vermehrt wäre, bedienen.

§. 228.

Z. §. 228. Eben so sieht man daß jeder Verhältniß hypothetischer Logarithmus gefunden werde, wenn man den Tabulärlogarithmus des folgenden Gliedes von dem hypothetischen des vorangehenden subtrahieret.

Z. B. Der hypotetische Logarithmus der Verhältniß 2 : 11 ist 9, 2596.

Z. §. 229. Wir wissen, daß bey den Decimalbrüchen der Nenner immer Eins ist, mit so vielen angehengten Nullen als in dem Zähler Ziffern nach dem Puncte oder Strichlein kommen, wodurch die ganzen darinnen vorkommenden Zahlen von den Decimalziffern gesöndert werden (§ 89), also findt man den hypothetischen Logarithmus eines Decimalbruches, wenn man für die Zahl, mit der er ausgedrückt wird, den hypothetischen Logarithmus sucht, und von der Charakteristika so viele Einheiten abzieht, als Ziffern nach dem Strichlein oder Puncte waren.

Z. B. Wir wollen den hypothetischen Logarithmus des Decimalbruches 0, 23 suchen, so finden wir ihn 9. 3617; denn der Tabulärlogarithmus von 23 ist 1. 3617, und der hypothetische 11, 3617 da dann in dem gegebnen Bruche zwo Ziffern nach dem Strichlein kommen, und also der Nenner 100 ist, welcher Zahl der Tabulärlogarithmus 2, 000 zukömmt, so erhalten wir den hypothetischen unsers Bruches, wenn wir 2, 000 von 11, 3617 abziehen, das ist, wenn wir die Charakteristika 11 um so viel Einheiten vermindern, als Ziffern nach dem Strichlein darinnen vorkommen, da uns dann 9 bleibt. Eben so finden wir für 0, 03 den hypothetischen Logarithmus 8, 4771; für den unächten Bruch 1, 32 den hypothetischen Logarithmus 10, 0492; und für den unächten 12, 2 den hyp. Log. 11, 0492.

Z. §. 230. Wenn also ein hypothetischer Logarithmus eine kleinere Charakteristica als 10 hat, so ist er als ein Logarithmus eines ächten Decimalbru-

ches

ches anzusehen, hat er aber zur Charakteristika nicht weniger als 10, so ist er ein Logarithmus einer ganzen Zahl oder eines unächten Bruches, und läßt sich leicht in einen Tabulärlogarithmus verwandeln, (§ 224) und man kann darnach die ihm zukommende ganze Zahl auch mit den angehengten Decimalziffern, wenn er solche fordert, wie wir oben § 221 gezeigt haben, in den gemeinen Tabellen finden.

§. 231. Für einen hypothetischen Logarithmus, dessen Charakteristika kleiner als 10 ist, (z. B. 8,4771) den gehörigen Decimalbruch zu finden. A.

1. Suche in den Tabellen den gegebnen Logarithmus ohne auf seine Charakteristica acht zu geben, mit der größten Charakteristika deiner Tabellen, oder wenn er mit solcher nicht gefunden wird, mit der nächst kleinern (1,4771), und merke die ihm gehörige Zahl (30) a.

2. Vor dieser Zahl setze so viel Nullen weniger hin, so viel die Charakteristika (8) des gegebnen Logarithmus weniger als 10 ist, (also hier zwo) und setze das Strichlein nach der ersten Nulle, so hast du den gesuchten Bruch (0,030 oder 0,03)

Eben so finden wir, daß dem hypothetischen Logarithmus 9,3617 der Bruch 0,23, und dem hypothetischen Logarithmus 7,0086 der Bruch 0,00102 zukomme.

Ein Decimalbruch muß so viel Decimalziffern haben, so viel in der Charakteristika seines hypothetischen Logarithmus weniger Einheiten sind, als darinnen wären, wenn er für eine ganze Zahl mit eben den Ziffern gehörte (§ 229.) Nun wenn er für eine solche gehörte, so bestünde seine Charakteristika aus so viel Einheiten über neune, als Ziffern wären; weil B.

ein gemeiner Logarithmus so viel Einheiten enthält als Ziffern in der dazugehörigen Zahl sind, weniger Eins (§ 217) und ein hypothetischer um 10 mehr (§ 223) hat. Wenn ich aber so viele Nullen vor die Ziffern setze, als die Charakteristika Einheiten weniger als 10 ist, und nach der ersten das Strichlein mache, so kommen nach dem Strichlein sammt den Ziffern so viele Decimaltheile weniger als neune als der Charakteristika Einheiten von neune fehlen; also sind sie so viele als sie vermöge der Charakteristika seyn müssen.

Also in dem angeführten Beyspiele da die Charakteristika 8 ist, und ihr also zwey von 10 mangeln, wenn man 8 für die Charakteristika 10 nähme, gehörte er als hypothetischer Logarithmus für die ganze Zahl 3, weil dann der Charakteristika 2 davon mangeln, so müssen 2 Ziffern (nämlich sammt der Nulle) unter die Decimaltheile kommen, also noch eine Nulle vor 3 nach dem Strichlein, und eine vor dem Strichlein stehen, nämlich 0, 03, es müssen also zwo Nullen vor diese Ziffern kommen, und nach der ersten das Strichlein.

IX. Von den unendlich großen, und unendlich kleinen Größen.

E. §. 232. Eine Größe, die größer ist als jede, die man geben kann, heißt eine unendlich Große; und eine, die kleiner ist, als jede, die man geben kann, heißt eine unendliche Kleine, oder Infinitesima: das Unendliche wird durch das Zeichen ∞ angedeutet.

Z. §. 233. Also hat eine Infinitesima keine endliche Verhältniß gegen einer endlichen Größe, und die

die endliche Größe hat keine gegen der unendlichen (§ 161), und darum wird eine Infinitesima in Vergleich einer endlichen Größe, und diese in Vergleich einer unendlichen für nichts gehalten.

§. 234. Eine Infinitesima also zu einer endlichen Größe addieret, vermehrt; und subtrahieret, vermindert sie nicht. Und eben so eine endliche zu einer unendlichen addieret vermehrt sie nicht, und davon subtrahieret vermindert selbe nicht. 3.

Also z. B. Wenn in einer arithmetischen wachsenden Progreßion mit unendlich vielen Gliedern, das erste Glied a heißt und das letzte w, so ist $w + a = w$, und die Summe aller Glieder $\frac{1}{2}$ nw (§ 167.)

§. 235. Weil ein Bruch desto kleiner ist, je größer der Nenner ist, wenn man den nämlichen Zähler behält (§ 68); so ist ein Bruch der zum Zähler eine endliche, zum Nenner aber eine unendliche Größe hat eine unendliche kleine Größe 3.

Also z. B. $\frac{1}{\infty}$, $\frac{348}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$ sind Infinitesimen.

§. 236. Ein Product aus zwo unendlichen Größen als Factoren heißt ein unendliches der zweyten Ordnung, wenn man nun dieses wieder mit einer unendlichen Größe multiplicieret, so ist das neue Product ein unendliches der dritten Ordnung ꝛc. Eine Infinitesima aber der zweyten Ordnung ist jene Größe, gegen der die mit ihr verglichne ein unendliches der zweyten Ordnung ist: man deutet das unendliche der zweyten Ordnung durch $\infty\infty$, oder ∞^2; eines der dritten durch ∞^3 an; und eine Infinitesima der zweyten Ordnung durch $\frac{1}{\infty^2}$, eine der dritten durch $\frac{1}{\infty^3}$ oder ∞^{-3}. C.

Z. §. 237. Gleichwie aber eine endliche Größe mit einer endlichen multiplicieret keine unendliche der ersten Ordnung macht, (§ 233) also macht auch eine unendliche der ersten Ordnung mit einer endlichen multiplicieret kein unendliches der zweyten Ordnung, und kein unendliches von was immer für einer Ordnung steiget durch die Multiplication mit einer endlichen Größe zu einer höhern Ordnung.

Nämlich es ist $\infty^{m} \times a = a \infty^{m}$

Z. 238. Also auch entgegen giebt eine unendliche Größe, wenn sie mit einer endlichen dividieret wird, keinen endlichen, sondern einen unendlichen Quotienten: und ein Unendliches von höherer Ordnung, wenn es durch eine endliche Größe dividieret wird, giebt wieder einen Quotienten von der nämlichen Ordnung, als das Dividendum war.

Nämlich es ist $a\infty^{m} : a = \infty^{m}$

Z. §. 239. Weil ein Unendliches höherer Ordnung zu einem Unendlichen von einer niederer Ordnung sich eben so verhält wie eine unendliche Größe der ersten Ordnung zu einer endlichen, so ist auch ein Unendliches von niederer Ordnung in Vergleich eines von einer höhern für nichts zu achten, und vermehrt selbes nicht, wenn man es gleich dazu etliche mal addieret; und vermindert es nicht, wenn man es davon subtrahieret (§ 234). Und eben so ist eine Infinitesima von höherer Ordnung nichts gegen einer von niederer, und vermehrt sie wenn sie addieret wird, und vermindert sie wenn sie subtrahieret wird, nicht im mindesten.

Geo-

Die Geometrie.

I. Erste Geometrische Begriffe und Ausmessung gerader Linien.

§. 240. Eine stetige endliche Größe, die nämlich an allen Seiten begränzet ist, heißt ein mathematischer Körper, oder glatt hin ein Körper. Die Gränzen eines solchen Körpers heißet man seine Oberfläche. Die Gränzen aber einer Oberfläche werden Linien, und die Gränzen der Linien Puncte genennt. E.

§. 241. Wir haben also an einem Körper 3 Größen, nämlich seine Länge, seine Breite und seine Tiefe; an den Oberflächen aber nur zwo, nämlich die Länge und Breite; und an den Linien nur eine, nämlich die Länge zu messen: bey den Puncten aber ist gar nichts, daß sich messen läßt.

Die natürlichen Körper sind zwar auch begränzet, und scheinen unsern Sinnen stetig zu seyn; sie sind es aber nicht, wie uns die Physik lehret. Doch betrachten wir daran bald alle drey, bald nur zwo, bald gar nur eine Ausmessung: denn wenn wir zum Beyspiele von der Größe eines Feldes oder Ackers reden, so fragt ja niemand, wie tief, wohl aber wie lang und breit er sey; und wenn wir von dem Wege reden von einer Stadt zur andern, so fragt man gemeiniglich nur wie lang, nicht wie breit dieser Weg sey; entgegen giebt es auch Fälle, da man die ganze Ausdehnung nach allen Seiten betrachtet, z. B. Wenn man von der Größe einer Mauer redet.

§. 242. Es ist also die Oberfläche kein Theil des Körpers, und die Linie kein Theil der Oberfläche, und der Punct kein Theil der Linie. 3.

§. 243. Man hüte sich eine unendlich klare Linie mit einem Puncte zu verwechseln: denn jede endliche Linie muß man sich aus kleinern und immer kleinern bis ins Unendliche als ihren Theilen zusammen gesetzt vorstellen, jeden diesen Theilen giebt man noch in seinen Gedanken eine Länge, obwohl etwa eine unendlich kleine; aber der Punct ist selbst keine Linie noch ein Theil derselben, sondern der Anfang oder das Ende einer Linie, oder der Ort da eine die andere durchschneidet. Also machen auch unendliche Puncte miteinander keine Linie aus, weil sie nur die Gränzen der Linien sind. Und eben so ist eine Linie kein Theil einer Fläche, auch kein unendlich kleiner; und die Fläche kein Theil eines Körpers.

B. §. 244. Wenn aber ein Punct als fortfliessend betrachtet wird, so ist der Weg, den er macht, eine Linie, und eben so entsteht durch eine stetig fortfliessende Linie eine Fläche, und durch eine also fortfliessende Fläche ein Körper.

§. 245. Man kann diese Begriffe auch einiger massen den Augen vorstellen. Denn wenn bey der Nacht eine feuerige Kugel sehr schnell durch die Luft fliegt, stellt sie dem Auge in einer Entfernung, in der sie ruhig nur als ein Punct erscheint, eine feurige Linie vor: treibt man aber ein feuerige Ruthe, die man in großer Entfernung nur als eine Linie sehen würde, schnell im Kreise herum, stellt sie eine Fläche, nämlich einen Zirkel vor: und eben so glaubt man einen runden Körper zu sehen, wenn man eine sehr weiße Fläche auf einer dazu gerichten Maschine sehr schnell umtreibt.

E. §. 246. Aehnliche Dinge sind, in denen kein Unterschied außer der Größe ist. ∽ Dieses ist das Zeichen der Aehnlichkeit.

§. 247. Aehnliche Dinge können zumal auch gleich groß seyn, oder nicht seyn ohne Schaden der Aehnlichkeit. Zwey gleich große Eyer mögen einander auch ähnlich seyn. Ein Kind ist oft einiger massen seinem Vater ähnlich, ob es gleich sehr viel kleiner als er ist.

§. 248. Alle Puncte sind einander ähnlich, 3. denn da der Punct noch Größe, noch Theile hat, findt man nichts in einem, das anders in dem andern wäre, und also müssen sie ähnlich seyn.

§. 249. Wenn zwey Dinge einem dritten G. ähnlich sind, sind sie auch selbst einander ähnlich.

§. 250. Eine gerade Linie ist die, deren jede E. Theile der ganzen; eine krumme aber deren nicht jede Theile der ganzen ähnlich sind.

§. 251. Schneiden wir von der geraden Linie BA einen Theil AC weg, wenn wir nur alles, was nicht zum Begriffe einer Linie gehört, beyseits setzen, finden wir nichts in der Linie AC ausser der verschiednen Länge, das nicht auch in der Linie AB zu finden ist, und also ist sie jener ähnlich. Es erklären zwar manche eine gerade Linie durch das Fliessen eines Punctes beständig nach der nämlichen Richtung. Allein stellen wir uns die Richtungen nicht schon vorhin als gerade Linien vor, die ein bewegliches Punct durch seinen Lauf beschreibet oder zu beschreiben sucht? andere sagen: sie sey der kürzeste Weg zwischen zweenen Puncten; das will so viel sagen, als sie sey die kürzeste aus allen Linien die zwischen zweenen Puncten seyn können. Allein messen wir nicht die krummen Linien durch Vergleich mit geraden? und können wir also wohl einen ächten Begrife von ihren Größen haben, ehe wir die gerade Linie begreifen? Ich sehe also nicht, warum man die Wolfische Erklärung der geraden Linie, die die einzige richtige ist, verlassen solle. Fig. 2.

Ganz anders verhält es sich mit krummen Linien: denn schneide von der Linie MN den Theil MC ab, wirst du nicht gleich merken, daß außer der Größe nicht alles in einer, wie in der andern ist? die ganze Linie MN hat drey Büge in die Höhe, und zweene abwärts, der Theil MC aber nicht. Fig. 3.

Eben so schneide von der Zirkellinie den Theil GD ab, so wirst du gleich sehen, daß dieser zwo Gränzen, einen Fig. 1.

Anfang und ein Ende habe, da doch die ganze Zirkellinie noch Anfang noch Ende hat, sondern in sich selbst läuft. Du wirst sehen, daß der Theil GD keinen Raum einschliesse; daß man, ohne sie zu übersteigen, von einer Seite zur andern, da man sie umgeht, kommen könne, das doch beym ganzen Zirkel nicht angeht: du wirst ferner sehen, daß in der ganzen Zirkellinie je eine Höhlung einer andern gegen über steht, welches doch bey ihren Theile GD nicht geschieht, und so wird jeder, dem es an Witze und Einsicht nicht mangelt, bey jeder krummen Linie bemerken, daß die Theile der ganzen nicht ähnlich sind.

Z. §. 252. Alle gerade Linien sind einander ähnlich; denn man kann sie alle als Theile einer unendlichen geraden Linie betrachten (§ 249)

E. §. 253. Zwischen zweenen Puncten läßt sich nur eine gerade Linie ziehen.

Z. §. 254. Wenn also zwo gerade Linien aus einem Puncte ausgehen, können sie nicht mehr in einem andern zusammen kommen.

E. §. 255. Man nimmt zum Maaße gerader linien eine willkürige gerade Linie an, die man eine Ruthe nennt, und in 10 gleiche Theile theilet, welche man Fuß oder Schuhe heißt. Den Schuh theilt man ferner in 10 Zolle, und jeden Zoll in 10 Linien, jede Linie in 10 Scrupel.

§. 256. Die zehntheilige Maaße sind in der Geometrie wegen bequemmer Rechnung gebräuchlich: im bürgerlichen Leben aber theilt man gemeiniglich die Ruthe in 12 Schuhe, den Schuh in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien, diese aber nur in 10 Scrupel. Und sind auch die Maaße der Größe nach in verschiednen Ländern verschieden. Also z. B. verhält sich der baierische Schuh zum Pariser Schuhe wie 1000 zu 1113; zum wienerischen 1000 : 1083; zum rheinländischen = 1000 : 1075, endlich zum nierenbergischen = 1000 : 1041. Also geben 1113 baierische Schuhe tausend pariser Schuhe.

§. 257.

§. 157. Kürze halber werden die Ruthen mit (°), die Schuhe mit (I), die Zolle mit (II), die Linien mit (III), endlich die Scrupel mit (IV) bezeichnet. z. B. $4^{\circ}\ 3^{I}\ 2^{II}\ 5^{III}\ 2^{IV}$ heißt: 4 Ruthen, 3 Schuhe, 2 Zolle, 5 Linien und zweene Scrupel.

§. 258. Auf dem Papiere bedienet man sich meistens des verjüngten Maaßstabes, da ein kleines willkühriges Maaß statt des Großen gilt. Um alles im Kleinen vorzustellen, was der Natur nach viel größer ist. Man bereitet sich einen solchen Maaßstab auf folgende Weise:

1. Ziehe eine gerade Linie a f und auf selber schneide mit kleiner Eröffnung des Zirkels 5 gleiche Theile ab, die sich leicht noch jede in zweene gleiche nach dem Augenmaaße mit dazwischen gesetzten Puncten oder Strichlein zertheilen lassen, so hat man eine Ruthe ab die in 10 Schuhe getheilet ist (oder einen Schuh in 10 Zolle getheilt wenn ab für einen Schuh gilt). F. 4

2. Diese Ruthe (diesen Schuh) ab übersetze auf die Linie b f, so vielmal als es angeht, so werden bc, cd, ef Ruthen (Schuhe) seyn.

3. Schreibt man alsdann die Ziffern dazu, wie die Figur weiset, so ist der verjüngte Maaßstab fertig.

§. 259. Wenn man zwo 2 Größen (z. B. zwey Dreyecke) also auf einander wirklich, oder in Gedanken setzen kann, daß die Gränzen der einen völlig in die Gränzen der andern fallen, so nenne ich sie eintreffende Größen. E.

§. 260. Eintreffende Größen sind einander gleich und ähnlich, und wenn zwo Größen einander gleich und ähnlich sind, müssen sie auf einander eintreffen. E.

§. 261. Wenn zwo Größen auf eine dritte eintreffen, sind sie einander gleich und ähnlich. E.

§. 262.

A. §. 262. Eine gerade Linie auf dem Papier zu ziehen deren Länge nach dem verjüngten Maaßstabe z. B. 3 Ruthen, 6 Schuhe, gegeben ist.

a. 1. Setze einen Fuß eines Handzirkels in das Ende
Fig. der dritten Ruthe nämlich in e, den andern in den
4. sechsten Schuh in der äußersten Ruthe, die allein in Schuhe getheilet ist, wo das Ziffer 6 steht.

2. Mit dieser unveränderten Oeffnung des Zirkels, da man seine beyde Füße an ein gerades Li-
F.5 nial anlegt, werden die Puncte m und n, wo sie aufstehen, bezeichnet werden, und du wirst die Linie m n an dem Liniale mit der Reißfeder oder dem Reißbleye, von gegebner Größe ziehen können.

A. §. 263. Die Länge einer auf dem Papier gegebnen geraden Linie z. B. m n auf dem verjüngten Maaßstabe zu bestimmen.

a. 1. Setze einen Fuß deines Zirkels in m den andern in n.

2. Und ohne die Oeffnung des Zirkels zu ändern setze einen Fuß desselben in das Ende jener Ruthe e, die es leidet, daß der andere Fuß in die äußerste Fällt, welche in Schuhe getheilet ist, so wird der Fuß in e die Zahl der Ruthen, der andere aber die Zahl der Schuhe, so noch dazu kommen, z. B. 3°, 6', andeuten.

Wie gerade Linien auf dem Felde mit Ketten oder Stangen ꝛc. gemessen werden, davon kann man meine Geodäsie nachsehen. Am beßten zeigt man es den Discipeln auf dem Felde selbst.

G. §. 264. Größen die einerley Maaß haben sind einander gleich.

§. 265.

§. 265. Folglich wenn eine Linie eben so viel Z. Ruthen, Schuhe ꝛc. hat, als ein andere gegebne, so sind sie einander gleich.

§. 266. Wer eine gerade Linie nach dem an einem Orte üblichen Maaße gemessen hat, und ihre Länge nach einem andern Maaße zu wissen verlangt, wird solche durch die Regel Detri, wenn ihm die Verhaltniß einer Messerey zur andern bekannt ist, bestimmen können. z. B. Es sey gegeben die Höhe eines Thurnes von 247 baierischen Schuhen, man will wissen wie viel er pariser Schuhe hoh sey, so sprich (§ 256) wie sich verhält 1113 zu 1000 also verhalten sich 247^{I} zu 221^{I}, 0^{I}, 2^{III}, 3^{IV}.

II. Von den Winkeln, und ihrem Maaße.

§. 267. Man nennt eine ebene Fläche die, E. in der man von jedem gegebnem Puncte zu jedem andern darauf gegebnen eine gerade Linie ziehen kann.

§. 268. Wenn eine gerade Linie CD auf einer E. ebenen Fläche um einen festen Punct C herumläuft, Fig. und im Herumlaufen weder wächst noch abnimmt, 1. beschreibet sie durch ihre Bewegung einen Zirkel; der feste Punct C heißt der Mittelpunct oder das Centrum; die krumme Linie aber DGAEFBD, die der äußerste Punct D beschreibt, heißt die Peripherie oder der Umkreis des Zirkels; jede gerade Linie vom Mittelpuncte C bis zur Peripherie heißt ein Radius, Stral oder Halbmesser des Zirkels; wenn aber eine gerade Linie AB, die sich beyderseits an der Pheripherie endiget, durch den Mittelpunct C geht, heißt sie der Durchmesser oder Diameter.

§. 269. Weil die gerade Linie CD, da sie den Z. Zirkel beschreibt, weder wächst, noch abnimmt, so bleibt auch der Punct D immer gleichweit von dem

Mit-

Mittelpuncte C entfernet, da nun eben dieser Punct C in seiner Bewegung die Peripherie beschreibet, so ist es klar, daß der Zirkel eine ebene Fläche sey, die von einer in sich selbst laufenden krummen Linie begränzet ist, in der jeder Punct, von einem Puncte C, der mitten in dieser Fläche ist, gleich weit entfernet ist.

§. 270. Hier haben wir eine Worterklärung des Zirkels, die aus der vorangehenden Erklärung der Sache entsteht. Die Sacherklärungen führen immer den Beweis der Möglichkeit der Sache, die sie erklären, wesentlich mit sich; aber die Worterklärungen, damit wir nicht in leere Worte verfallen, haben manchmal eines Beweises nöthig: folgt nun eine Worterklärung aus der Erklärung der Sache, so sind wir dadurch von ihrer Möglichkeit versichert, und wissen, daß wir davon einen wahren Begrif und nicht leere Worte haben.

Z. §. 271. Es sind also alle Stralen eines Zirkels und alle Durchmesser als doppelte Stralen einander gleich.

E. §. 272. Einen Theil der Peripherie heißt man einen Bogen; und man theilt die ganze Peripherie in 360 kleine Bögen, die man Grade nennt: jeder Grad wird in 60 noch kleinere Bögen, die man Minuten heißt, getheilet, und eben so theilt man ferner jede Minute in 60 Secunden, jede Secunde in 60 Terzen ꝛc.

Z. §. 273. Es kommen also auf die halbe Peripherie 180 Grade, und der vierte Theil derselben hält 90, der sechste sechzig Grade.

§. 274. Man pflegt die Grade wie die Ruthen mit dem Zeichen (°), die Minuten mit (ᴵ) wie die Schuhe, und die Secunden mit (ᴵᴵ) zu bezeichnen; aus den Umständen aber sieht man jederzeit leicht, was diese Zeichen sagen wollen, denn schreibt man z. B. Eine gerade Linie AB = 26°, 3ᴵ, 4ᴵᴵ, so heißt es: die gerade Line AB

halte

halte 26 Ruthen, 3 Schuhe und 4 Zolle. Ist aber die Rede von einem Zirkelbogen, dessen Größe man in Graden und Theilchen der Grade geben will, so heißt AB = 26°, 3', 4'', so viel, als der Bogen AB hält 26 Grade, 3 Minuten und 4 Secunden.

§. 275. Ein Theil eines Zirkels, den zweene E. Strahlen CD und CB, mit dem darzwischen stehenden Bogen DB begränzen, heißt ein Sector oder Ausschnitt eines Zirkels: hält dieser Bogen 90°, so ist der Sector ein Quadrant; hält er 60°, so ist er ein Sextant; und wenn er nur 45° hat, so ist er ein Octant, oder achte Theil des Zirkels.

§. 276. Das Bestimmende nenne ich, bey dessen Gegenwart alles übrige, das zu einer Sache gehöret, da seyn muß. Das Bestimmte aber alles das, was das Bestimmende mit sich bringt. E.

z. B. Das Bestimmende eines Zirkels ist eine gegebne gerade Linie, ein fester Punct, und die Bewegung dieser Linie um diesen Punct auf einer ebnen Fläche; das Bestimmte ist der Zirkel selbst, seine Peripherie, die Größe der Graden ꝛc. welches alles nicht anders seyn kann, als es durch den gegebnen Diameter und der Weise ein Zirkel damit zu beschreiben, nothwendig seyn muß.

§. 277. Einerley Dinge nenne ich, die zumal E. ähnlich und gleich sind.

z. B. Zwo gerade Linien von gleicher Länge.

§. 278. Wenn das Bestimmende einerley G. ist, ist auch das Bestimmte einerley.

§. 279. Wenn das Bestimmende ähnlich G. ist, ist auch das Bestimmte ähnlich.

§. 280. Es sind also alle Zirkel, und alle Z. Peripherien der Zirkeln einander ähnlich, und wenn Zirkel gleiche Durchmesser oder gleiche

Stra-

Stralen haben, so sind sie einerley; und haben auch einerley Peripherien.

Denn alle gerade Linien, folglich alle Stralen (§ 252) und alle Puncte (248) sind einander ähnlich, und die Weise damit einen Zirkel zu beschreiben ist bey jedem Zirkel die nämliche (§ 268): also ist auch das Bestimmende bey allen Zirkeln ähnlich; und wenn die Stralen gleich sind, einerley.

Z. §. 281. Bögen von gleich vielen Graden sind einander ähnlich; und wenn die Peripherien von gleichen Stralen sind, sind diese Bögen einerley: und so haben auch alle Bögen, die einander ähnlich sind, gleich viele Grade.

Z. §. 282. Die Sectoren, derer Bögen gleich viele Grade haben, sind einander ähnlich, und wenn sie zumal von gleichen Strahlen sind, sind sie einerley.

E. §. 283. Ein Strahl AC liegt dem andern CB, oder eine grade Linie AC der andern CB gerad gegen über, wenn beyde in die nämliche gerade Linie AB fallen.

L. §. 284. Der Durchmesser theilt den Zirkel in zweene gleiche Theile.

B. Es falle der Stral, womit man den Zirkel beschreibt, CD anfänglich in die Linie CB; von da erhebe er sich, und gehe fort, bis der äußerste Theil in die Linie BA komme, die der Linie CB gerad gegen über liegt, so hat er den Bogen DBA beschrieben; nun steige dieser Stral unter die Linie AC herunter, und gehe fort, bis er wieder in CB fällt, so ist der Bogen AEFB beschrieben: da ist nun klar, daß mit dem nämlichen Strale CD der obere Theil des Zirkels BDGA eben so, wie der untere AEFB sey beschrie-

schrieben worden: man hat ihn nämlich, jeden zu beschreiben, so lang fortgeführt, bis er der gradenLinie, von der er ausgegangen ist, gerade gegen über lag; also muß der obere Theil BDGA mit dem untern AEFG einerley, und also demselben gleich seyn (§ 268 § 278), und der Zirkel durch den Diameter AB in zweene gleiche Theile geschnitten werden. w. z. E.

§. 285. Der Durchmesser also schneidt auch 3. die Peripherie in zweene gleiche Theile.

§. 286. Aus jedem Puncte in einer geraden 3. Linie außer den äußersten, und auch aus diesem, wenn man die Linie weiter hinauszieht, kann auf selber ein halber Zirkel beschrieben werden; denn man kann diese gerade Linien, oder einen Theil derselben als den Durchmesser des darauf beschriebnen Zirkels ansehen.

§. 287. Eine gegebene gerade Linie AB in A. zweene gleiche Theile zertheilen.

1. Setze einen Fuß deines Handzirkels in A, Fig. und eröffne ihn bis der andere beyläufig zur Mitte 1. reicht, und mache damit einen kleinen Bogen m, der a. die gerade Linie AB durchschneide:

2. Nun setze einen Fuß deines Handzirkels, ohne seine Oeffnung zu ändern in B, und mache einen zweyten Bogen n, der wieder die Linie AB durchschneidet, weil nun beyde Bögen mit dem nämlichen Strale sind beschrieben worden, so ist Am = Bm (§ 271).

3. Die ganze kurze Linie mn wird man unschwer nach dem Augenmaaße in der Mitte C durchschneiden können, und so wird AC = Am + mC = Bn + nc = BC seyn (§ 45).

§. 288.

A. §. 288. Um eine gerade Linie AB einen Zirkel beschreiben.

a. 1. Theile die gerade Linie AB in zweene gleiche Theile mit einem Durchschnitte in C.

2. Setze nun einen Zirkelfuß in C, und eröfne den Handzirkel bis in A, so kannst du mit dem Strale CA den verlangten Zirkel um die Linie AB beschreiben.

§. 289. Es sind zwar diese zwo Auflösungen nur mechanisch, aber in der Ausübung leicht und richtig genug. Eine geometrische Art, eine Linie in zweene gleiche Theile zu schneiden werden wir weiter hinten (§ 443) anführen. So kann ich auch hier die Eintheilung der Peripherie in ihre Grade nicht abhandeln, da noch die Gründe der Beweise fehlen: practisch findt man sie in meiner Gerodäsie beschrieben. Vom Zirckel aber müßten wir deßwegen etwas schon jetzt sagen, weil die Größe der Winkel in Graden und Theilen der Grade durch Zirkelbögen gemessen werden.

E. §. 290. Wenn zwo gerade Linien AC und CB
Fig. in einem Puncte C zusammen kommen, oder wenigst
7. zusammen kommen würden, wenn man sie verlängerte, so sagt man sie neigen sich gegen einander, und diese ihre Neigung gegen einander heißet man einen Winkel; den Punct C da sie zusammen kommen oder einander durchschneiden, nennt man die Spitze des Winkels oder den Winkelkopf; die Linien AC oder CB aber heissen die Schenkel des Winkels.

§. 291. Es machen zwar auch krumme Linien Winkel mit geraden, die man vermischte, und mit andern krummen, die man Krummlinigen nennt; wir wollen aber hier nur von den Geradlinigen sprechen. Ueberhaupt bemerket man einen Winkel entweder nur mit einem Buchstabe, den man an die Winkelspitze setzet, oder mit dreyen als ACB, derer der mittlere an der Winkelspitze steht.

§. 292.

§. 292. Es liegen also beyde Schenkel eines W. Winkels jederzeit in der nämlichen ebenen Fläche.

§. 293. Die Größe oder das Maaß des E. Winkels ist der Zirkelbogen m n, den man aus der Winkelspitze C als einem Mittelpuncte beschreibt. So viel nämlich dieser Bogen Grade, Minuten ꝛc. hat, so viel eignet man dem Winkel zu.

§. 294. Winkel die einerley Maaß haben, G. sind einander gleich.

§. 295. Die Bogen, die man zwischen den Z. Schenkeln aus der Winkelspitze beschreibt, sie mögen mit einem größern oder kleinern Strale beschrieben werden, sind alle einander ähnlich (§ 279) und also haben sie gleich viele Grade (§ 281): darum ist es gleichgiltig mit was immer für einem Strale der Bogen zwischen den Schenkeln beschrieben werde, die Zahl der Graden ꝛc. bleibt die nämliche.

§. 296. Die Länge der Schenkeln trägt zur Z. Größe des Winkels nichts bey.

§. 297. Gleiche Winkel sind einander ähnlich, Z. und ähnliche sind gleich.

§. 298. Auf dem Papiere erforschet man die Größe Fig der Winkeln durch halbe Zirkel von Meßing oder Horn ꝛc. 6. die man Transporteurs nennt., die an einem kleinen Linale AB aufstehen, darauf der Mittelpunct C mit einem Einschnitte bemerket ist. Die Theilung in 180 Grade bezeichnen zu äußerst an der Peripherie kurze Linien, und von 5 zu 5 etwas längere, und noch längere von 10 zu 10, diesen wird gemeiniglich in zweyen Reihen, einer von der Rechten zur Linken, und einer andern von der Linken zur Rechten die Zahl der Grade, um sie bequemer zu zählen, beygesetzt. Auf dem Felde bedient man sich bald ganzer Zirkeln, bald halber, bald kleinerer Sectoren, davon ich in meiner Geodäsie weitläufiger handle.

A. §. 299. Einen in Graden gegebnen Winkel aus dem gegebnen Puncte C einer Linie FE auf dem Papiere mit dem Transporteur aufrichten.

a. 1. Lege die innere scharfe Seite des Transporteurs an die Linie FE an, und rücke den Mittelpunct desselben an den gegebnen Punct C hin.

2. Von dem Liniale hinauf zähle auf den messingen Bogen die Grade; und wenn du den gegebenen Grad (z. B. den dreyßigsten) gefunden hast, mache darneben einen Punct m.

3. An diesem Punct m und an C lege ein Linial, und ziehe daran eine gerade Linie CD, so hast du den Winkel DCE oder mCE von so viel Graden, als man begehrt hätte.

A. §. 300. Einen Winkel auf dem Papiere mit dem Transporteur zu messen.

a. 1. Setze den Mittelpunct des Transporteurs an die Winkelspitze, und das Linial BA an einen Schenkel CE.

2. Bemerke den Ort m, wo der andere Schenkel durchgeht, und zähle die Grade vom ersten Schenkel BA an bis zum andern, oder bis zu m; so geben diese die Größe des Winkels, den man messen wollte.

E. §. 301. Wenn zweene Winkel ACB, und
Fig. BCD einen gemeinschaftlichen Schenkel BC, und die
8. 10 nämliche Winkelspitze C haben, so heissen sie an-
11. gränzende Winkel, liegen nun auch zugleich die gemeinschaftlichen Schenkel AC, und CD einander
Fig. gerad gegenüber, so heissen sie Nebenwinkel; und
10. wenn diese einander gleich sind, (10 Fig.) heißt man
11. sie

sie rechte, wenn sie aber ungleich sind (11 Fig.) schiefe Winkel; von diesen wird einer nämlich der, welcher größer als ein rechter Winkel ist, ACB ein stumfer; der andere aber BCD, der kleiner als ein rechter Winkel ist, ein Spiziger genennt.

§. 302. Es müssen also die Nebenwinkel mit einander zum Maaße einen halben Zirkel (§ 286) das ist 180° (§ 273) haben; und wenn einer von ihnen in Graden gegeben ist, so weiß man auch den andern; und wenn einer spitzig ist, muß nothwendig der andere stumpf seyn. 3.

z. B. Es sey der Winkel BCD = 35°, so wird ACB = 145° seyn; denn 180° — 35° = 145°.

§. 303. Das Maaß also eines rechten Winkels ist 180° : 2 = 90°; und jeder Winkel, der zu seinem Maaße 90 Grade hat, ist ein rechter Winkel (§ 294). 3.

§. 304. Es müssen auch alle aneinander anstränzende Winkel ACB, BCE, ECF, FCD, die mit einander auf einer geraden Linie AD stehen, und ihre gemeinschaftliche Spitze C in ihr haben, zum Maaße einen halben Zirkel oder 180° haben, und wenn man bis auf einen alle andere weiß, so ist dadurch auch dieser bekannt. 3. Fig 9.

z. B. Es sey außer dem Winkel BCD das Maaß aller übrigen = 145°, so muß dieser zum Maaße 35° haben.

§. 305. Und weil zweene halbe Zirkel einen ganzen machen, so müssen alle Winkel, derer Schenkel rings herum aus einem Puncte ausgehen, miteinander 360° haben, und wenn man alle auſſer einem weiß, so ist auch dieser bekannt. 3.

z. B. Es sey die Summe aller Winkel außer einem = 325°, so muß dieser allein 35° haben.

E. §. 306. Wenn eine Linie BC mit einer andern
Fig. 10 CD einen rechten Winkel macht, oder auf einer andern AD also empor steht, daß sie beyderseits rechte Winkel BCA, und BCD macht, so sagt man sie sey auf selbe perpendicular, normal oder senkrecht.

E. §. 307. Ein aus zwey unter einem rechten
Fig. 12 Winkel zusammen gesetzten Linialen bestehendes Instrument wird ein Winkelmaaß genennt.

A. §. 308. Auf eine Linie AB aus einem in selber C, oder durch einen außer selber gegebnen Punct m eine Perpendicularlinie mit Hilfe des Winkelmaaßes zu ziehen.

a. Lege einen Schenkel des Winkelmaaßes an die Linie AB genau an, und rücke es daran fort, bis der andere Schenkel FE an den Punct m, oder seine Winkelspitze an den Punct C kömmt, und ziehe neben den Schenkel FE eine Linie, so wird sie, wenn das Winkelmaaß richtig ist, auf die Linie AB senkrecht seyn; weil sie damit einen rechten Winkel macht, da sie mit einem solchen eintrift (§ 260).

§. 309. Es ist zu merken, daß zum Eintreffen der Winkel, nicht nöthig sey, daß, so man sie auf einander legt, die ganzen Schenkel des einen in die ganzen Schenkel des andern eintreffen, welches, wenn sie von ungleicher Länge
Fig. 13 sind, nicht seyn kann, denn die Länge der Schenkel trägt nichts zur Größe des Winkels bey (§ 296); genug ist es, daß, wenn man die Spitze eines Winkels a auf die Spitze A legt, und den Schenkel ac auf AC, in solchem Falle auch der Schenkel ab auf AB nicht außer selbem etwa in m, oder innerhalb selbem etwa in n falle.

A. §. 310. Ein Winkelmaaß zu prüfen ob es richtig sey oder nicht.

1. Ziehe auf einer ebenen Fläche eine gerade a. Linie AB, und setze auf selbe mit Hilfe des Winkelmaaßes eine senkrechte cm.

2. Wende alsdann das Winkelmaaß um, und lege seinen Schenkel FG an die Linie CB genau an, und rücke das Winkelmaaß sachte fort, bis der andere Schenkel EF an die Linie cm hinkömmt, wenn er sich nun in beyden Puncten m und c zugleich angeleget, so ist das Winkelmaaß richtig; so aber dieses nicht geschieht, ist es unrichtig (§ 301).

§. 311. Die genaueste Weise ein Winkelmaaß zu verfertigen und zu prüfen gebe ich in meiner Geodäsie. Wir werden auch weiter hinten eine andere Weise zeigen eine senkrechte Linie zu ziehen, die auch ein Winkelmaaß richtig zu machen dienen kann.

§. 312. Scheitelwinkel ACB, acb sind die, derer Schenkel einander (nämlich AC dem Schenkel aC, und BC dem Schenkel bC) gerad gegenüber liegen, oder derer der andere acb entsteht, wenn man des einen ACB seine Schenkel beyderseits über die Winkelspitze C hinauszieht. E. F14

§. 313. Die Scheitelwinkel m und n sind L. einander Gleich.

Denn man sieht wohl, daß die Winkel m und B. s, und eben so s und n Nebenwinkel seyn, also ist

$$\begin{array}{l} m + s = 180^\circ \\ n + s = 180^\circ \end{array} \quad (\S\ 302.)$$

$$m + s = n + s \quad (\S\ 48)$$

$$m = n \quad (\S\ 47)$$

§. 314. Von den Parallellinien und Wechselwinkeln, welche entstehen, wenn Parallellinien

von

von einer andern durchschnitten werden, verschiebe ich noch zu handeln, bis ich die Gründe der dazu gehörigen Beweisen fest gesetzt habe.

III. Wie die Dreyecker entstehen, und welche einerley seyn.

E. §. 315. Ein geradlinigtes Dreyeck, oder
F15 glatthin ein Dreyeck ist eine ebene Fläche, die mit dreyen geraden Linien begränzet ist.

Man pflegt sie durch dieses Zeichen (△) anzudeuten. Die Linien AB, AC, CA, welche selbes begränzen, nennet man die Seiten des Dreyeckes.

E. §. 316. Wenn alle drey Seiten einander gleich
F16 sind, so heißt es ein gleichseitiges Dreyeck; sind aber nur zwo Seiten einander gleich, so nennt man es
F17 gleichschenkelicht; die übrigen Dreyecke, bey denen keine Seite der andern gleich ist, werden skale-
F15 ne, oder ungleichseitige Dreyecke genennt.

E. §. 317. Machen zwo Seiten eines Dreyeckes,
F18 miteinander einen rechten Winkel, so heißt man es
F19 ein rechtwinkelichtes Dreyeck; machen sie mit-
FF. einander einen stumpfen Winkel, so heißt man es
15. ein stumpfwinkelichtes Dreyeck; ein spitzwin-
16. kelichtes aber, wenn alle drey Winkel spitzig sind.
17.

E. §. 318. In dem rechtwinkelichten Dreyecke
F18 ACB, werden die zwo Seiten AC, und CB, welche den rechten Winkel gestalten Katheten oder Lothe; die Seite AB aber, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, wird die Hypothennuse genennt.

§. 319.

§. 319. Jede Fläche, welche von geraden Linien begränzet wird, heißt eine geradlinigte Figur. E.

§. 320. Es sind also die geradlinigten Dreyecke geradlinigte Figuren. Z.

§. 321. So viel eine geradlinigte Figur Seiten hat, so viel hat sie auch Winkel: denn jede Linie macht mit der daranliegenden einen Winkel. Z.

§. 322. Also sind in dem Dreyecke drey Winkel. Z.

§. 323. Man nennt in zwoen geradlinigten Figuren, derer eine so viele Seiten oder Winkel hat als die andere, die respondierenden oder übereinstimmenden oder gleichnamigen Winkel jene, welche die gleichvielte nach der Ordnung sind, wenn man von dem ersten (etwa von dem größten oder von dem kleinsten) in beyden anfängt, und nach der nämlichen Richtung im Kreise umher zählt. (Es sey dann, daß eine verkehrt stehe) also im Dreyecke sind die respondierenden Winkel, der größte in einem mit dem größten im andern, der kleinste in einem mit dem kleinsten im andern, und der mittlere mit dem mittlern. Eben so nennt man die respondierenden oder gleichnamigen Seiten, welche in beyden die gleichvielte nach der Ordnung sind, von der ersten (etwa der größten oder der kleinsten) angefangen. E.

z. B. In den Dreyecken ABC und abc, wenn wir beyderseits von dem kleinsten Winkel A und a als dem ersten anfangen, und nach B und C in einem, nach b und c in dem andern herumgehen, sind die respondierenden Winkel beyderseits der erste A und a, der zweyte B und b, der dritte C und c. Und wenn wir die größten Seiten AB und ab für die ersten gelten lassen, sind diese einander respondierend, und die zweyten BC und bc, und die dritten CA und ca. Eben so seyn die größten Seiten AB F15 und F30

und

und ab die ersten respondierenden, BC und bc die anderen, so werden CA und ca die dritten seyn.

G. §. 324. Wenn alle Gränzen einer Größe einerley sind, so sind selbe Größen einerley; sind alle ihren Gränzen ähnlich, so sind sie ähnlich; und verkehrt, wenn die Größen ähnlich sind, sind auch alle ihre Gränzen ähnlich ꝛc.

§. 325. Diesen Grundsatz wird man leicht gelten lassen, wenn man bedenkt, daß der Geometer nur die Gestalten und Größen erweget, diese aber durch ihre Gränzen bestimmet werden.

B. §. 326. Wenn in zwoen gradlinigten Figuren alle respondierende Seiten, und alle respondierende Winkel einander gleich sind, so sind diese Figuren einerley; und umgekehrt, wenn sie einerley sind ꝛc. Denn ebne Flächen sind, was die Höhe anbelangt, sich selbst ihre Gränzen; also nur ihr Umfang kann verschieden begränzet seyn; da nun diese Gränzen bey geradlinigten Figuren aus lauter geraden Linien und Winkeln bestehn, so haben sie, wenn jede gleichnamige Linien und gleichnamige Winkel einander gleich sind, alle Gränzen einerley; also müßen auch sie selbst einerley seyn.

B. §. 327. Wenn in zwoen geradlinigten Figuren alle respondierende Seiten gegen einander die nämliche Verhältniß haben, und die respondierenden Winkel einander gleich sind, so sind diese Figuren einander ähnlich; und umgekehrt, wenn sie ähnlich sind, müssen die respondierenden Seiten unter einander die nämliche Verhältniß haben, und die respondierenden Winkel einander gleich seyn. Denn so haben sie ähnliche Gränzen; weil die gleichen Winkel einan-

ander auch ähnlich sind, (§ 297) und die geraden Linien einander theils für sich selbst (§ 252) theils hier in ihrer Verhältniß gegen einander (§ 162) ähnlich sind.

§. 328. Wenn also in zwoen Dreyecken die respondierenden Seiten, und respondierenden Winkel einander gleich sind, so sind selbe Dreyecke einerley; sind diese Dinge aber nur ähnlich, so sind auch die Dreyecke einander nur ähnlich: und verkehrt wenn ꝛc. 3.

§. 329. Aus dreyen gegebnen geraden Linien, derer zwo miteinander größer als die dritte sind, ein Dreyeck zugestalten. A.

z. B. Es sey eine der gegebnen Linien = 12^1 die zweyte = 10^1 die dritte = 15^1 nach dem verjüngten Maaßstabe der vierten Figur.

1. Ziehe eine gerade Grundlinie AC von gegebner Länge (12^1) nach dem angenommenen Maaßstabe. a. Fig.

2. Eröffne den Handzirkel nach der begehrten Länge der zweyten Linie (15^1), und setze alsdann einen Fuß desselben in den Punct A, mit dem andern mach einen Bogen y.

3. Eben so eröffne den Handzirkel nach der gegebnen Länge der dritten Linie (10^1), und setze einen Fuß in C, mit dem andern mache ein Bögelchen x, das den Bogen y durchschneide.

4. Ziehe nun von dem Schneidungspuncte B der Bögen x und y und die Puncte A und C zwo gerade Linien AB, und BC, so ist das Dreyeck ABC aus den gegebnen Linien gestaltet.

§. 330. Daß in jedem Dreyecke die Summe zwoer Seiten miteinander größer sey als die dritte, wird nachgehends erwiesen werden (§ 399): darum ist es auch unmöglich ein Dreyeck aus 3 Linien zu gestalten, derer zwo miteinander nicht größer seyn als die dritte.

§. 331.

3. §. 331. Drey gegebne Seiten also, nebst der Weise sie zu vereinigen, sind das bestimmende eines Dreyeckes; das daraus entstehende Dreyeck und die Winkel, die sich durch Zusammenfügung dieser Linien ergeben, sind das Bestimmte. Es ist nämlich unmöglich, daß aus diesen dreyen Linien, die man also zusammen setzt, was anders als ein Dreyeck, und als ein solches, oder andere Winkel als diese entstehen: Es sind aber auch die geraden Linien von gleicher Länge einerley (§§ 252, 277).

8. §. 332. Also, wenn in zwoen Dreyecken die respondierenden Seiten einander gleich sind, wenn nämlich AC = ac, AB = ab, und BC = bc, so sind diese Dreyecke einerley, und alle respondierende Winkel einander gleich, das ist, es ist △ ABC ≡ △ abc, und A = a, B = b, C = c.

§. 333. Darum kann man auch mit Ketten allein auf dem Felde (mit dem Zirkel auf dem Papiere) einen gegebnen Winkel A in a übersetzen, das ist, in a einen Winkel Cad errichten, der dem CAD gleich ist. Denn, man mache ae = AE von beliebiger Länge, 2. man messe AD, stecke in a durch den äußersten Ring einer Kette einen Stab ein, und ergreife sie mit einer Hand in d so, daß ad = AD sey, und strecke sie aus, als wollte man einen Bogen m damit beschreiben (mit dem Handzirkel wird auf dem Papiere aus dem Mittelpuncte a mit einem Strale = AD ein Bogen m beschrieben) 3. Man messe auch DE, und stecke durch den äußersten Ring einer andern Kette in e einen Stab ein, und ergreife sie bey d so, das ed = ED werde, und strecke sie aus, als wollte man ein Bogen n damit beschreiben. (Auf dem Papier wird mit dem Handzirkel, den man so weit eröffnet, daß ed = ED wird, ein Bogen n beschreiben.) 4. Nun sehe man, daß man die Puncte d und d der zwo Ketten ad und ed zusammen bringe, daß sie einander berühren, so ist der Winkel Ead oder eab dem Winkel EAD gleich; denn A und a sind die respondierenden Winkel der Dreyecken DAC, und dac, welche, weil ihre respondierende Seiten alle einander gleich sind, einerley sind. (Die Linie

ad,

ad, wenn der Punct d bestimmt ist, läßt sich auf dem Papiere, so man es nöthig hat leicht in b verlängern.)

§. 334. Je länger man die Seiten dieser Dreyecke ad = AD, und cd = ED und je näher man beyde einander gleich macht, je genauer und sicherer wird der Winkel A dadurch in a übersetzt, wenn ac schon vorhin = AC ist, und man verlängert CD bis in d so, daß cd = CD wird, ist auch der Winkel A in a übersetzt, wie unten (§ 340) erhellen wird.

§. 335. Wenn man also in einem gleichschenkelichten Dreyecke ABC auf die Grundlinie AC (auf der die gleiche Schenkel aufstehn) aus dem entgegen gesetzten Winkel B eine Linie BD durch den Punct D zieht, der die Grundlinie AC in zweene gleiche Theile theilet; so ist, weil AB = BC, und AD = DC und die Seite BD beyden Dreyecken gemein ist, das △ ABD = △ CBD, und A = C, ABD = DBC und ADB = BDC; und folglich BD auf AC senkrecht. (§ 306.) Z. F17

§. 336. Darum kann man auch ohne Winkelmaaße aus einem gegebnen Puncte D, auf der Linie MN eine senkrechte Linie BD auf folgende Weise errichten: 1. Man eröffne einen Handzirkel nach belieben, und setze einen Fuß desselben in D, und bestimme mit dem andern in der Linie MN, die zweene Puncte A und C, da man sie mit dem nämlichen Strale beyderseits durchschneidet, so ist DA = DC (§ 271) 2. Darnach mache man den Handzirkeil weiter auf als zuvor, und setze einen Fuß desselben in A, mit dem andern beschreibe man einen Bogen x, und darnach mit der nämlichen Oeffnung von C aus, den Bogen y. 3. Zieht man nun durch B den Schneidungspunct dieser zweenen Bögen und

den Punct D die Linie BD, so ist diese auf AC oder MN senkrecht.

B. §. 337. Man kann aber auch ohne Winkelmaaße aus einem gegebnen Puncte B eine Perpendicularlinie auf die darunter liegende Linie MN auf folgende Weise herablassen. 1. Man setze einen Fuß eines Handzirkels in B, und mache mit dem andern einen Bogen, der die Linie MN an zwenen Orten A und C durchschneide. 2. Die Linie AC theile man in zweene gleiche Theile (§287) in D, und so wird man BD auf AC oder MN senkrecht ziehen können (§ 306).

B. §. 338. Auch einen gegebenen Winkel
F21 MBN werden wir jezt in zweene gleiche zertheilen können auf folgende Weise. 1. Man setze einen Fuß eines Handzirkels in den Winkelkopf B, und beschreibe mit dem andern durch die Schenkel BM und BN einen Bogen, der sie in A und B durchschneide, so wird AB = BC seyn. 2. Nun setze man einen Fuß eines Handzirkels in A, und beschreibe mit beliebigem Strale von diesem Mittelpuncte aus den Bogen x; darnach mit eben diesem Strale von C aus den Bogen y. 3. Ziehe man durch den Schneidungspunct E die Linie BE, so wird diese den Winkel in zweene gleiche Theile zertheilen: denn weil BA = BC, und AE = CE, und BE beyden Dreyecken gemein ist, so müssen die respondierenden Winkel ABE und EBC der Dreyecken ABE und CBE gleich seyn.

A. §. 339. Aus zwoen gegebnen Seiten, nebst
F15 dem Winkel, den sie einschließen, ein Dreyeck gestalten.

z. B. Eine Seite AB sey = 15', die andere AC = 11', und der eingeschloßne Winkel = 61°.

1. Man ziehe zu erst die Grundlinie AC von der verlangter Länge (§ 262.)

2. Man richte auf selber den begehrten Winkel mit einer blinden Linie AE auf (§ 299).

3. Davon schneide man die Linie AB von gegebner Länge ab, und ziehe sie sichtbar.

4. Vereinige man die Puncte B und C mit der dritten Linie BC, so ist das Dreyeck gestaltet.

Blinde Linien nenne ich, die man kaum sieht oder leicht wieder auslöschen kann: auf dem Papiere zieht man sie mit der bloßen Zirkelspitze, die man nicht zu stark andrückt: die Linie AB wird darnach mit der Reißfeder sichtbar gemacht.

§. 340. Zwo Seiten also, nebst dem Winkel, den sie einschliessen, und die Art daraus ein Dreyeck zu gestalten sind das Bestimmende desselben: derowegen wenn in zwoen Dreyecken ABC und abc zwo Seiten AB und AC sammt dem Winkel ACB, den sie miteinander machen, den zwoen respondierenden Seiten ab und ac und dem respondierenden Winkel bac gleich sind; wenn nämlich AB = ab, AC = ac, A = a; so werden auch diese Dreyecke und ihre übrige respondierende Theile einander gleich seyn, das ist, es wird BC = bc, B = b, und C = c seyn. Z.

§. 341. Wir wollen nun einen Gebrauch des vorangehenden Zusatzes in der Geodäsie zeigen. Man soll die Entfernung zweener Orte A und B, von deren einem zum andern, weil ein Hügel oder Graben ꝛc. dazwischen liegt, in gerader Linie nicht kommen kann, von einander Fig. 20

mes-

messen, doch könne man aus einem dritten Puncte zu beyden hinkommen, und das umliegende Feld sey eben und offen. So stecke dann zuerst einen Stab in den Punct C ein, daraus man gerad in A und B kommen kann. 2. Miß die Linie AC mit einer Kette, und trage sie in Ca zurück, und setze in a einen Stab, da; wenn du das Auge hinhaltest, dir der Stab C den Gegenstand A decken muß, woraus du abnimmst, daß die 3 Puncte A, C, und a in der nämlichen geraden Linie sich befinden. 3. Eben so trage die Linie CB in Cb zurück, und setze in b einen Stab; weil nun AC = aC, BC = bC und die Zwischenwinkel m n als Scheitelwinkel einander gleich sind (§ 313), so wird auch ab = AB seyn, und darfst du nur ab messen, so ist eben ihre Länge die Länge von AB.

B. §. 342. Weil in einem gleichschenkelichten
F17 Dreyecke zwo Seiten einander gleich sind, so werden, wenn eine Linie BD den zwischen den gleichen Schenkeln eingeschloßnen Winkel ABC in zweene gleiche Theile ABD und DBC theilet, (weil in diesen zweyen Dreyecken zwo Seiten sammt dem Zwischenwinkel einander gleich sind), auch △ ABD ≡ △ CBD, AD = DC, und der Winkel BDA = BDC = 90°, und also die Linie BD auf AC senkrecht seyn.

A. §. 343. Aus zwoen gegebnen Seiten AB
F15 und BC, und dem Winkel C, der der größern Seite gegenüber an der kleinern anliegt, ein Dreyeck gestalten.

a. 1. Man ziehe eine blinde Linie von beliebiger Länge CM, und richte den gegebnen Winkel MCF (§ 299) (z. B. von 61°), darauf auf.

2. Auf dem Schenkel dieses Winkels CF bestimme man die Länge der kürzern gegebnen Seite CB. (z. B. 12').

3. Fasse man mit einem Handzirkel die Länge der andern gegebnen Seite BA (z. B. 15') und setze

einen

einen Fuß desselben in B, mit dem andern mache man ein Bögelchen, das die blinde Linie in A durchschneide.

4. Zieht man nun die Linie BA, und mache CA sichtbar, so ist das Dreyecke gestaltet.

§. 344. Also zwo Seiten nebst dem Winkel, der an der kleinern anliegt, und die Weise ein Dreyeck daraus zu machen sind das bestimmende selbes Dreyeckes. Wenn also in zweyen Dreyecken ABC und abc AB = ab, BC = bc, und die der größern Seite entgegen gesetzte Winkel C und c gleich sind, so sind diese Dreyecke einerley, und die respondierenden Theile einander gleich, das ist △ ABD ≅ △ abd, AC = ac, A = a, B = b. 3.

§. 345. Aus zwoen gegebnen Seiten AB und BD, und dem Winkel A, der der kleinern Seite gegenüber steht, (doch daß diese wenigst so groß sey, daß sie den Winkel A schließen kann) und gegebner Art des daranliegenden, oder der großen Seite entgegen stehenden Winkels, wenn er schief ist (man muß nämlich sagen oder stumpf oder spitzig seyn soll) ein Dreyeck gestalten. A.

1. Man ziehe eine blinde Linie AN, und setze mit einer andern blinden AE den gegebnen Winkel A darauf (§ 299) z. B. 40°, 30'. a.

2. Man bestimme auf der blinden Linie AE die Länge der gegebnen Seite AB. z. B. 14'.

3. Man fasse mit einem Handzirkel die Länge der gegebnen Seite AB, und setze darnach einen Fuß desselben in B, mit dem andern beschreibe man einen Bogen, der die Linie AN entweders nur berüh-

rühren, oder in zweenen Puncten D und C durchschneiden wird. (Wenn er sie gar nicht erreichen sollte, wäre diese Linie zu kurz den gegebnen Winkel A zu schließen).

4. Ereignet es sich, daß dieser Bogen die Linie AN nur in einem Puncte G berühret, so ziehe man BG von B auf den Berührungspunct G hin, und das Dreyecke wird fertig seyn. (In diesem Falle, wie nachmals (§ 475) wird erwiesen werden, ist G ein rechter Winkel). Geschieht es aber, daß der Bogen die Linie AN in zwenen Puncten D und C durchschneidet, und verlangt man daß der Winkel, der der größern gegebnen Seite AB gegenüber stehen soll, ein spitziger sey, so zieht man die Linie BC auf den äußern Schneidungspunct C zu; soll aber dieser ein stumpfer Winkel werden, so zieht man BD auf den innern Schneidungspunct D zu; das übrige von den blinden Linien fällt weg, AD, oder AC werden sichtbar gemacht; so ist im ersten Falle das Dreyeck ABC, im andern △ ABD gestaltet.

§. 346. Daß in den rechtwinkelichten Dreyecken DGB und CGB, der Winkel C = D allzeit ein spitziger sey, wird unten § 369 erwiesen werden: ist aber BDG ein spitziger Winkel, so muß nothwendig ADB ein stumpfer seyn. (§ 302.)

§. 347. Zwo Seiten also nebst dem Winkel der der kleinern gegenübersteht, und der Art des Winkels, der der größern Seite gegenüberstehen soll, mit der jetzt beschriebnen Weise ein Dreyeck daraus zu gestalten ist das bestimmende eines solchen Dreyeckes; wenn also in zweyen Dreyecken ABD und abd oder ABC und abc oder ABG und abg, AB = ab, BD = bd, oder BC = bc oder BG = bg, und A = a; die Art aber des Winkels, der

der der größern Seite AB gegenüber stehe, in beyden die nämliche ist (das ist, entweder in beyden D und d ein stumpfer, oder in beyden C und c ein spitziger, oder in beyden G und g ein rechter Winkel), so werden diese Dreyecke einerley, und AD = ad, oder AC = ac oder AG = ag, und D = d, oder C = c oder G = g, und B = b seyn.

§. 348. Also überhaupt zwo Seiten nebst einem Winkel, dem eingeschloßnen (§ 346) oder nicht eingeschloßnen, wenn nur im letztern Falle der größern gegebnen Linie gegenüber stehender Winkel in beyden von der nämlichen Art ist, nebst der Weise daraus ein Dreyeck zu gestalten sind das Bestimmende der Dreyecke: wenn also diese in zweyen Dreyecken einerley sind, sind selbe auch einerley, und die übrigen respondierenden Winkel, und dritte Seite in beyden einander gleich. 3.

§. 349. Derowegen, wenn man aus dem Winkel B eines gleichschenkelichten Dreyeckes ABC, den die gleichen Schenkel miteinander machen, auf die entgegen stehende Grundline AC einen Senkel CD herunter läßt; so wird, weil BDA = BDC (§§ 330 und 306), BA = BC, und BD = BD ist, △ BDA ≅ BDC, und AD = DC, und ABD = DBC seyn. 3 F17

§. 350. Die Perpendicularlinie also, die man von der Spitze des Winkels, den die gleichen Seiten eines Dreyeckes gestalten, auf die entgegenstehende Grundlinie fällt, theilt selbe und das ganze Dreyeck in zweene gleiche Theile, und es erhellt auch wieder, was schon oben § 335 ist erwiesen worden, daß nämlich auch die Winkel A und 8.

C an der Grundlinie in dem gleichschenkelichten Dreyecke einander gleich seyn.

§. 351. Und weil im gleichseitigen Dreyecke,
Z. F16 was man immer für eine Seite zur Grundlinie nimmt, zwo gleiche darauf stehen; so müssen darinnen jede zweene und zweene, also alle Winkel einander gleich seyn: Es ist also das gleichseitige ein gleichwinkelichtes Dreyeck.

§. 352. Ferner, wenn A = C, und AD =
Z. F17 DC, weil DB = DB, so wird auch △ ADB = △ CDB, und AB = CB seyn, das ist, wenn die Winkel an der Grundlinie eines Dreyeckes einander gleich sind, so sind auch die darauf stehenden Seiten einander gleich, und das Dreyeck ist gleichschenkelicht.

§. 353. Also ist das gleichwinkelichte Drey-
Z. F16 eck, indem alle Winkel einander gleich sind, nothwendig ein gleichseitiges.

§. 354. Aus jeden zweenen Puncten A und
Z. F17 C einer Linie MN, die von dem Puncte D, da eine senkrechte Linie BD darauf steht, gleichweit entfernet sind, kann man gegen jeden Punct B in der Perpendicularlinie BD, zwo gerade Linien AB und CB von gleicher Länge ziehen. Denn wenn AD = DC, so ist in den Dreyecken ADB, und CDB, weil auch der Winkel ADB = CDB und DB = DB ist, allezeit AB = CB.

§. 355. Aus einer gegebnen Seite AC, und
A. zweenen daranliegenden Winkeln A und C ein Dreyeck gestalten.

1. Ziehe

1. Ziehe die Linie AC von gegebner Länge. a.

2. Errichte bey A den gegebnen Winkel CAE, z. B. = 48°, und in C den andern gegebnen ACF, z. B. = 70° (§ 299).

3. Der Punct B, da die Schenkel AE, und CF einander durchschneiden, wird die Länge der Seiten AB und CB, und den Winkel ABC bestimmen.

§. 356. Es ist also auch eine Seite allein mit den zweenen daranliegenden Winkeln, und der Weise daraus ein Dreyeck zu machen das Bestimmende eines Dreyeckes, und darum wenn in zweyen Dreyecken ACB und acb AC = ac, A = a, und C = c ist, wird das △ ACB ≅ △ acb, AB = ab, BC = bc und B = b seyn. 3.

§. 357. Um einen Gebrauch dieses letzten Zusatzes in der Geodäsie zu zeigen setzen wir, wir sollen die Weite eines Flußes dießseits desselben in D messen. Setzen wir aber, es liege jenseits desselben an dem Ufer ein merklicher Gegenstand als etwa z. B. ein großer Stein, so stecken wir 1. in D einen Stab ein, und gehen hinter ihm in A zurück, und setzen auch hier einen Stab, so daß, wenn man das Auge daran hält, der Stab D den Stein B decke. 2. Wir gehen nun neben dem Flusse her bis in C, und stecken auch hier einen Stab ein, nnd einen andern in a also, daß aC = CA werde, und A, C, und a in einer geraden Linie liegen. 3. Uebersetzen wir den Winkel DAE oder DAC in cad und machen ad = AD, und nachdem wir in d wieder einen Stab eingestecket, gehen wir 4. hinter selben mit einem Stabe, daran wir beständig unser Auge hinhalten, so lange zurück, bis selbem zugleich der Stab a von dem Stabe d, und der Stein B von dem Stabe c bedeckt wird: nun in diesem Puncte b wird wieder ein Stab eingesetzt, so wird db die Breite des Flusses seyn, die wir mit Ketten messen können. Denn es ist ACB = acb (§ 313) und den Winkel a haben wir = A gemacht, und Ca = CA,

also ist das △ acb ≡ △ ACB, und ab = AB; nun haben wir auch ad = AD gemacht, so muß auch ab — ad oder bd = AB — AD oder BD nämlich der Breite des Flusses seyn. Unterdessen giebt es zwar bequemere und sicherere Weisen eine solche Breite zu messen: wir führen diese nur an, den Anfängern einen Nutzen dieses geometrischen Satzes zu zeigen, obwohl dieser der geringste ist. Die Geometrie dienet andern Wissenschaften sonderlich der Naturlehre, und es ist ja nicht unsere Absicht nur Geodäten aus unsern Lehrlingen zu erziehen.

IV. Von Durchschneidung der Parallellinien durch eine Dritte, und was daraus folgt.

E. F23 §. 358. Wenn zwo Linien AB und CD sich gegen einander gar nicht neigen, und also, wenn man sie auch beyderseitts unendlich verlängerte, doch nirgends zusammen stossen würden, werden sie **gleichlaufende oder Parallellinien** genennt.

Z. §. 359. Folglich hat jeder Punct in einer der Parallellinien AB von der andern entgegen stehenden CD gleiche Entfernung, und also sind alle Perpendicularlinien die man zwischen Parallellinien aufrichtet, von gleicher Länge; und wenn die Perpendicularlinien zwischen zwoen Linien von gleicher Länge sind, sind diese Linien parallel.

A. F24 §. 360. Durch einen gegebnen Punct N eine Linie mit einer gegebnen CD parallel zu ziehen.

1. Man ziehe von dem Puncte N auf die Li-
a. nie CD eine Perpendicularlinie NM, und richte

aus

aus einem Puncte m in der Linie CD eine Perpendicularlinie nm auf. (§ 208)

2. Man mache mn = MN, und ziehe durch N und n eine gerade Linie AB, so wird diese mit CD parallel seyn.

Zur Ausübung ist folgende Auflösung bequemer, 1. Setze einen Fuß eines Handzirkels in N, und mache ihn so weit auf, bis der Bogen, den man mit dem andern Fuße beschreibet, die Linie CD streife. 2. Mit unveränderter Oeffnung des Zirkels setze einen Fuß desselben in einen beliebigen Punct m der Linie CD, und beschreibe von daraus mit dem andern Fuße einen Bogen n. 3. Ziehe durch den Punct N eine gerade Linie AB, die den Bogen n streife, und sie wird mit der Linie CD parallel seyn, wie sich aus dem, was unten § 475 wird gelehrt werden, zeigen läßt. Das ist auch wohl zu merken, daß die Parallellinien desto vollkommner und sicherer gezogen werden, je weiter die Perpendikel MN und mn voneinander entfernet sind.

§. 361. Wenn eine Linie EF auf eine der K. Parallellinien CD senkrecht ist, ist sie auch senk- F23 recht auf die andere AB. B.

Man mache Fm = Fn, so wird △ EFm = EFn, Em = En, und EmF = FnE und mEF = nEF seyn (§ 340): errichten wir nun auf CD zwo senkrechte Linien m G und n H, so wird GmE + EmF = HnE + EnF = 90° (§ 301), folglich GmE = EnH seyn (§ 47); es ist aber Gm = Hn (§ 359) und mE = n (wie schon erwiesen ist): also muß auch GEm = HEn seyn (§ 340); folglich ist FEG = mEG + mEF = HEn + nEF = HEF (§ 45) = einem rechten Winkel (§ 301), und also FE auf AB senkrecht. (§ 305) w. z. E.

§. 462.

L. §. 362. Wenn zwo gerade Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch gegen einander parallel.

B. Es sey erstlich die mittlere Linie CD parallel
F25 mit den äußern AB, und EF; und die Linien MG und NH gehen durch die Linie CD senkrecht durch; so wird KG = HL, und KM = LN (§ 359), folglich auch MK + KG oder MG = NL + HL oder NH seyn (§ 45): nun sind diese Linien auch auf AB senkrecht (§ 361): also müssen auch die äußern Linien EF und AB miteinander parallel seyn (§ 359)

Es sey zweytens eine der äußern AB mit der mittlern CD, und der andern äußern EF parallel, und die Linien MG und NH seyn senkrecht auf AB, und folglich auch auf CD (§ 361); so wird MG = NH, und GK = HL (§ 359), folglich auch GM — GK, oder KM = NG — HL oder NL (§ 47), und also die äußere EF mit der mittlern CD parallel seyn. Also ist es überhaupt wahr: wenn zwo gerade Linien mit einer dritten, es mag diese die mittlere, oder eine der äußern seyn, parallel sind, so sind sie auch gegen einander parallel.

E. §. 363. Wenn zwo Parallellinien AB, und
F26 CD von einer dritten EF durchschnitten werden, so nennt man die innern Winkel die, welche diese Linien mit dem Stücke der dritten machen, das zwischen ihnen ist, als m, n, M und N; die äußern Winkel aber jene, die sie mit den beyderseits darüber hinausgehenden Stücken der Linie EF machen, als da sind oben e und u, unten o und s.

Wechselwinkel nennt man so wohl die innern als die äußern, derer einer dießseits, der andere jenseits

seits der Linie EF an der andern Parallellinie liegt, also die innern sind die stumpfen M und m, wie auch die spitzigen N und n; die äußern e und s, wie auch u und o.

§. 364. Wenn zwo Parallellinien AB, CD L. von einer dritten EF durchschnitten werden, so werden 1. die innern Wechselwinkel (z. B. N und n) einander, 2. jeder äußerer Winkel dem innern entgegen gesetzten auf der nämlichen Seite der Linie EF, (z. B. u und n) gleich seyn. 3. Zweene innere Winkel, oder auch zweene äußere, die auf der nämlichen Seite der Linie EF liegen (z. B. M und n) werden miteinander 180° machen.

1. Man lasse aus M eine Perpendicularlinie B. MK auf AB fallen, und errichte aus m eine Perpendicularlinie auf CD; so wird diese zugleich auch auf AB senkrecht (§ 361), und L m = MK, (§ 359) seyn: nun sind K und L rechte Winkel, und die Linie Nn ist beyden dreyecken mLN und MKn gemein; folglich ist N = n (§ 340). Dieß war daß erste zu erweisen.

2. Die Winkel u und N sind Scheitelwinkel; folglich einander gleich (§ 373): da nun auch N = n ist (wie eben ist erwiesen worden) so ist auch u = n (§ 43) und dieß ware das andere.

3. Die Winkel m und n sind Nebenwinkel, sie machen also miteinander 180° (§ 302); da nun auch n = N ist (wie N. 1. erwiesen ist); so muß auch m + N = 180° seyn, (§ 15), welches das dritte zu erweisen war.

L. §. 365. Wenn zwo gerade Linien *AB*, und *CD* von einer dritten *EF* also durchschnitten werden, daß erstlich entweder die innern Wechselwinkel (z. B. *N* und *n*) einander gleich sind, oder zweytens einer der äußern dem innern auf der nämlichen Seite der Linie *EF* entgegen gesetzten (z. B. *u* = *n*) gleich ist, oder drittens zweene innere Winkel auf der nämlichen Seite der Linie *EF* (z. B. *m* und *N*) miteinander 180 Grade machen; so sind diese Linien *AB* und *CD* miteinander parallel.

B. 1. Setzen wir, die Linie AB sey mit CD nicht parallel, so muß sich durch den Punct n, da die Linie AB von der Linie EF durchschnitten wird, eine andere Linie mit CD parallel ziehen lassen (§ 360), die wir wollen nx nennen. Nun diese Linie nx muß mit der Linie EF die Wechselwinkel Enx und N gleich machen (§ 364), da nun auch, wie wir setzen AB den Winkel n oder EnB = N macht, so ist Enx = EuB, und diese zweene Winkel treffen auf einander ein (§ 260), es fällt also nB auf nx (§ 309); und da nx mit CD parallel ist, muß auch AB damit parallel seyn. d. w. d. erste z. e.

2. Wenn der Winkel u dem Winkel n gleich ist, so ist auch, weil u = N ist (§ 313), n = N (§43): ist aber n = N, so haben wir eben erwiesen, daß in solchem Falle die Linien AB und CD miteinander parallel seyn; also auch, wenn u = n, sind sie parallel. d. w. d. andere.

3. Wenn m + N = 180°, so ist auch (weil auch m + n = 180° ist) m + N = m + n (§ 43); folglich N = n (§ 47): ist aber N = n, so ist AB mit CD parallel (wie n. 1. ist erwiesen worden):

also wenn m + N = 180°, sind die Linien AB und CD parallel. d. w. d. dritte.

§. 366. Wenn also zwo gerade Linien *AB* und *CD* auf eine dritte *EF* senkrecht sind (weil in solchem Falle die innern Winkel m und n als rechte Winkel miteinander 180° machen) sind sie parallel. F. F27

§. 367. Ja auch was immer für einen nämlichen Winkel zwo gerade Linien *NO* und *no* gegen der nämlichen Gegend mit einer dritten machen, sind sie parallel; weil also die Winkel O und o gleich sind. F. F24

§. 368. Jetzt haben wir eine leichte Art Parallellinien zu ziehen: man halte ein Linial an die Linie EF fest, (dieses kann mit eigner Hand, oder durch einen Gesellen, oder mit darauf gelegtem Gewichte geschehen); an dieses Linial lege man einen Schenkel eines Winkelmaaßes an, und schiebe es daran auf und ab, so kann man an dem andern Schenkel her so viele Parallellinien ziehen als man nur will. Es ist auch nicht nöthig, daß der Winkel dieses Instruments vollkommen ein rechter sey, weil doch die Linien, die man daran zieht, wenigst alle unter dem nämlichen Winkel auf die Linie EF geneigt werden. F27

§. 369. In jedem rechtlinigten Dreyecke *ABC* macht die Summe aller Winkel zusammen 180°. L. F28

Man ziehe durch die Spitze C die Linie DE mit der Grundlinie AB parallel (§ 360), so wird A = a, B = b seyn (§ 364). Nun a + C + b sind = 180° (§ 360): also sind auch A + C + B = 180° (§ 15) w. z. E. B.

§. 370. Wenn also die Summe zweener Winkel A + B gegeben ist, so hat man auch den dritten B.

C = 180° — A — B; und wenn man einen C giebt, so hat man die Summe der übrigen A + B = 180° — C.

Es sey z. B. A = 46°, 15', B = 42°, 30'; so wird C = 180° — 88°, 45' = 91°, 15' seyn. Es sey C = 91°, 15', so wird A + B = 88°, 45' seyn.

Z. §. 371. Wenn also in einem gleichschenkelichten Dreyecke ein Winkel gegeben ist, wissen wir alle.

Fig. 17 z. B. Es sey der gegebne Winkel B, der der Grundlinie AC gegenüber steht = 40°, so ist A + C = 140°, A = C = 70°: oder es sey gegeben ein Winkel an der Grundlinie A = 70°, so ist A + C = 70 × 2 = 140°, B = 180° — 140° = 40°.

Z. §. 372. Im gleichseitigen Dreyecke aber, weil
Fig. 16 es zugleich gleichwinkelicht ist (§ 351), müssen jede Winkel = 180° : 3 = 60° seyn.

Z. §. 373. Und wenn in zweyen Dreyecken ABC
Fig. 15 und abc A = a, und C = c ist, muß auch B = b seyn.

Z. §. 374. Also, weil die Dreyecke einerley sind, wenn A = a, C = c, und AC = ac (§ 356); so sind sie auch einerley, wenn A a (oder C = c), B = b und AC = ac; es wird also auch alsdann C = c (oder A = a), AB = ab, und BC = bc seyn.

Z. §. 375. Wenn also in den rechtwinkelichten
Fig. 24 Dreyecken ONM, und onm, o = O ist; werden diese Dreyecke, weil in selben auch NM = nm ist: einerley, und ON = on seyn: zwo gerade Linien also, die unter dem nämlichen Winkel zwischen Parallellinien stehen, sind einander gleich.

§. 376.

§. 376. Setzen wir es sey O = o, ON = on, 3.
und M = m rechte Winkel, so wird auch MN = mn
(§ 344), und also AB parallel mit CD seyn. Das
ist, wenn zwo gerade Linien ON, on gleiche
Neigung zu einer dritten CD haben, so wird
auch die Linie AB, an die sie anstoßen, mit
dieser parallel seyn.

§. 377. Weil zweene rechte Winkel mitein- 3.
ander 180°; und zweene stumpfe noch mehrere
machen, so können nicht zweene rechte, noch
weniger zweene stumpfe Winkel in einem Drey-
ecke seyn; denn es bliebe ja nichts für den dritten
übrig.

§. 378. In dem rechtwinkelichten Drey- 3.
ecke machen die übrigen zweene Winkel 90°;
denn 180° — 90° ist = 90°. Wenn also einer
davon gegeben ist, weiß man den andern.

Z. B. Es sey A = 40°, so ist B = 90° — 40° = Fig
50°. 50.

§. 379. Der Winkel EDB, den AE die ver- 3.
längerte Seite AD eines Dreyeckes mit der an- Fig
dern daranliegenden Seite DB macht, heißt der 29
äußere Winkel des Dreyeckes.

§. 380. Der äußere Winkel eines dreyeckes L.
D ist den zweenen innern entgegen gesetzten
A und B gleich.

Denn A + B + C ist = 180° (§ 369): B.
nun ist auch C + D = 180° (§ 302):
folglich A + B + C = C + D (§ 43):
also A + B = D (§ 47):

V. Von

V. Von den ähnlichen Dreyecken.

L. §. 381. In den ähnlichen Dreyecken sind alle respondierende Winkel einander gleich; und wenn in zweyen Dreyecken die respondierenden Winkel einander gleich sind, sind selbe Dreyecke einander ähnlich.

B. Denn die Dreyecke sind geradlinigte Figuren Fig. 30 (§ 320); also wenn sie ähnlich sind, müssen die respondierenden Winkel darinnen einander gleich seyn (§ 327) d. w. d. erste.

Wenn zweene Winkel in einem Dreyecke den zweenen respondierenden gleich sind. z. B. Wenn $A = a$, $C = c$, so sind sie selben auch ähnlich (§ 297), und die dazwischen liegende Linie AC ist gleichfalls der respondierenden ac ähnlich (§ 252). Nun zweene Winkel an der Grundlinie nebst dieser, und der Art ein Dreyeck daraus zu gestalten sind das Bestimmende eines Dreyeckes (§ 356): sind nun diese Dinge einander ähnlich, so muß auch das bestimmte nämlich die Dreyecke ABC und abc einander ähnlich seyn (§ 279), und d. w. d. andere.

Z. §. 382. Also sind recht winkelichte Dreyecke einander ähnlich, wenn einer von den spitzigen Winkeln in beyden gleich groß ist.

B. §. 383. Zwo gleichschenkelichte Dreyecke aber wissen wir, daß sie einander ähnlich sind, so bald uns auch nur von einem Winkel bekannt ist, daß er dem respondierenden in dem andern Dreyecke gleich ist (§ 371); und die Gleichseitigen Dreyecke müssen alle einander ähnlich seyn (§ 372).

§. 384.

§. 384. In den ähnlichen Dreyecken ste- L.
hen alle respondierende Seiten gegen einander in der nämlichen Verhältniß; und Dreyecke, in denen alle respondierende Seiten gegen einander in der nämlichen Verhältniß stehen, sind einander ähnlich.

Denn die Dreyecke sind geradlinigte Figu- B.
ren (§ 320); also wenn sie einander ähnlich sind, müssen ihre respondierende Seiten gegen einander die nämliche Verhältniß haben (§ 327), d. w. d. erste.

Drey gerade Linien nebst der Weise ein Drey- E.
eck daraus zu gestalten sind das Bestimmende eines Dreyeckes (§ 331); Nun wenn in den respondierenden dreyen Seiten in beyden Dreyecken die nämliche Verhältniß gegen einander ist, so sind sie auch in der Vereinigung miteinander einander ähnlich; denn ausser der Größe ist nichts darinnen (weil sie als gerade Linien für sich selbst allein betrachtet alle einander ähnlich (§ 252) sind), zu unterscheiden als die Verhältniß, die sie gegen einander haben; ist nun diese Verhältniß einerley, so haben wir bey den bestimmenden die völlige Aehnlichkeit, denn die Größe der Seiten selbst gehört hier nicht zur Sache (§ 246), und die Weise aus 3 gegebnen Linien ein Dreyeck zu gestalten ist bey einem, wie bey dem andern: so muß dann auch das bestimmte nämlich die Dreyecke selbst einander ähnlich seyn. (§ 279. § 324) d. w. das andere.

§. 385. Wenn also zwey Dreyecke ABC und Z.
abc einander ähnlich sind, so wird AB : ab = AC: ac = BC : bc seyn; und wenn die Seiten sich

also gegen einander verhalten, so sind die Dreyecke ähnlich, und folglich A = a, B = b, C = c. Derowegen wenn zwey Dreyecke einander ähnlich sind, wenn nämlich A = a, B = b, C = c ist, und AB eine gewiße Zahl Ruthen oder Schuhe nach einem natürlichen Maaßstabe, ab aber eben so viele nach einem verjüngten hat; so müssen auch AC, und BC eben so viel Ruthen und Schuhe ꝛc. nach dem natürlichen Maaßstabe haben, als ac und bc nach dem verjüngten: und wechselweise wenn die Seiten im großen Dreyecke eben so viele Ruthen und Schuhe nach dem natürlichen Maaßstabe haben, als die Seiten in dem kleinen nach dem verjüngten, so sind diese Dreyecke einander ähnlich.

L. §. 386. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc A = a ist, und AB : ab = AC : ac, sind die Dreyecke ähnlich, und also auch die übrigen respondierenden Theile einander ähnlich.

B. Denn zwo Seiten nebst dem dazwischen kommenden Winkel und der Weise ein Dreyeck daraus zu machen sind das Bestimmende eines Dreyeckes (§ 339): dieses ist ähnlich, wenn diese Seiten gegen einander die nämliche Verhältniß haben (§ 246), und der dazwischen liegende Winkel beyderseits gleich groß ist (§ 297): also müssen auch in solchem Falle die Dreyecke selbst und ihre übrige Theile einander ähnlich seyn.

L. §. 387. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc A = a, und AB : ab = BC : bc (oder = BD : bd) und entweder die Seite BC größer als die Seite AB, oder die Art des Winkels

kels C und c (oder D und d) die nämliche ist; so sind diese Dreyecke und also auch ihre übrige respondierende Theile einander ähnlich.

Denn diese Dinge nebst der Art ein Dreyeck B.
daraus zu gestalten, sind das Bestimmende eines Dreyeckes, (§ 348) und in diesem Falle ähnlich: also müssen auch die Dreyecke und ihre übrige Theile einander ähnlich seyn.

§. 388. Die angeführten Lehrsätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke sind der Grund des Gebrauches des Meßtisches, eines in der Geodäsie sehr fürtreflichen Werkzeuges, das aus einer ebnen horizontalen Tafel bestehet (zuweilen wird sie auch vertical gestellt) die auf einem dreyfüßigen Gestelle ruhet, darauf man, wo man will eine Nadel einstecken und um selbe eine Alhidade (das ist ein mit Absehen versehenes Linial) umher bewegen kann. Ich habe dieses Instrument in meiner Geodäsie weitläufig beschrieben, und eine neue Art seines Gebrauches angegeben, dabey man viele Mühe ersparen, und richtiger als sonst verfahren kann. Doch um den Lehrlingen auch hier einen Gebrauch des gemeinen Meßtisches zu zeigen, setzen wir, man soll die Entfernung AB eines Ortes B von uns aus den Fz.
zwo Stationen A und C messen. 1. So setze das Tischchen in horizontaler Stellung anfangs in A; und in C setze ein Zeichen, als etwa einen Stab mit einem Fähnchen, das man von A aus leicht sehen kann. 2. Die Alhidade richte so, daß durch die Absehen der Gegenstand C erscheine, und die Entfernung AC (nachdem sie zuvor ist mit Ketten gemessen worden) bring im verjüngten Maaße nebst der Alhidade von a in c auf den Tisch. Das ist, wenn z. B. AC = 1000°, 5' im großen hält, mach auch ac im verjüngten Maaße = 1000°, 5'. 3. Darnach stecke eine dinne Nadel in a ein (wenn es nicht schon zuvor geschehen ist) und treibe die Alhidade um selbe herum, bis die Absehen auf B zu zielen: und ziehe neben ihr eine Linie von unbestimmter Länge ab. 4. Alsdann übersetze das Tischchen in C, und setze den Fahnen in A; die Nadel ziehe aus dem Punote a heraus, und stecke sie in c ein, die Alhidade aber

lege

lege an die Linie ac genau an, und richte das Tischchen so, daß die Absehen auf den Fahnen in A zielen. 5. Darnach ziele mit der Alhidade auf B zu, und ziehe darneben die Linie cb; diese wird die Linie ab durchschneiden, und das Dreyeck acb vollenden, welches dem großen ACB auf dem Felde völlig ähnlich seyn wird, denn es ist a = A und c = C, weil sie auf einander eingetroffen haben, und also haben wir schon die Aehnlichkeit dieser Dreyecke (§381): und weil ac so viele Ruthen und Schuhe nach dem verjüngten Maaße hat, als AC nach dem großen; müßen auch ab und cb so viele Ruthen und Schuhe im verjüngten Maaße haben, als AB und CB in dem natürlichen: wenn man also die Länge dieser kleinen Linien auf dem verjüngten Maaßstabe mißt (§ 258), weiß man auch die Länge der Linien AB und BC, obwohl man zu B nicht hingekommen ist. Wenn man nun eben so mehr Orte auf den Meßtisch bringt, wie wir jetzt den Ort B auf b hingebracht haben, so wird der Tische ihre Stellung gegen einander und Entfernungen voneinander nach dem verjüngten Maaße vorstellen. Was aber für Behutsamkeiten dabey anzuwenden, wenn alles genau seyn soll, wäre hier viel zu weitläufig zu erklären, davon mag man meine Geodäsie nachsehen, wenn man je geodätische Messungen selbst vornehmen will.

L. §. 389. Wenn man aus den Spitzen B und b zweyer ähnlichen Dreyecke ABC und abc senkrechte Linien BE und be auf die Grundlinie AC und ac herabläßt; verhalten sich diese, wie die Seiten dieser Dreyecke gegen einander. Es ist nämlich BE : be = AB : ab, und die Dreyecke ABE und abe, wie auch BEC und bec sind einander ähnlich.

B. Denn weil A = a und E = e ist, sind die Dreyecke ABE und abe ähnlich (§ 382); und ihre respondierende Seiten einander proportional (§ 384). Eben so zeigt man das △BEC ∽ △ bec sey.

§. 390. Wenn also ac eben so viele Schuhe B
im verjüngten Maaße hat, als AC in dem großen,
und die Dreyecke ähnlich sind, so muß auch be eben
so viele im kleinen als BE im großen haben; und es
muß be × ae, eben eine so große Summe als BE
× AC; ingleichen be × ½ ac eben eine so große
als BE × ½ AC geben; nur daß die erstern Sum-
men kleiner, die anderen großer Quadratschuhen ꝛc.
ist, von denen im Künftigen wird geredt werden.

§. 391. Wenn man in einem rechtwinke- K.
lichten Dreyecke ADB von dem rechten Winkel J54
D, auf die gegenüberstehende Hypothenuse AB,
eine senkrechte Linie DE herab läßt; theilt sie
das Dreyeck ADB in zwey Dreyecke AED und
DEB, die einander und dem ganzen Dreyecke
ADB ähnlich sind.

Denn die Dreyecke AED, und BED, weil bey B.
E beyderseits ein rechter Winkel ist (§ 306), sind
rechtwinkelicht (§ 317); nun hat jenes den Win-
kel A, das andere den Winkel B mit dem recht-
winkelichten Dreyecke ADB gemein; also sind die-
sem beyde (§ 382), und also auch sie einander ähn-
lich (§ 249).

§. 392. Folglich ist 1. AE : ED = ED : EB. Z
2. AB : BD = BD : EB.
3. AB : AD = AD : AE.

Das ist: ED ist zwischen AE und EB } die mittlere
BD ist zwischen AB und EB } Proportio-
und AD ist zwischen AB und AE } nallinie,
(§ 384).

§. 393. Also ist $ED^2 = AE \times EB$
$BD^2 = AB \times EB$ (§ 176).
$AD^2 = AB \times AB$

§. 394. Und also $AD^2 + BD^2 = (AB \times AE) + (AB \times EB)$
$= AB \times (AE + EB)$
$= (AB \times AB) = AB^2$

Das ist: Das Quadrat der Hypothenuse *AB* ist gleich der Summe aus den Quadraten der Catheten *AB*, und *BD*.

§. 395. Diesen Satz nennt man von seinem Erfinder, dem Pytagoras her, den pytagorischen, und wegen seinem fürtreflichen Gebrauche, den Meister der Mathematik. Pytagoras bemerkte anfänglich daß, wenn man die Quadrate der drey Zahlen 3, 4, 5, nämlich 9, 16, 25 miteinander vergleicht, das Quadrat der größten Zahl nämlich 25 den Quadraten der übrigen zwoen nämlich 9 16 miteinander gleich sey; und daß, wenn man ein Dreyeck von drey Seiten gestaltet, die sich zu einander verhalten wie die drey Zahlen 3, 4, 5, dieses Dreyeck rechtwinkelicht sey. Dieß nun gab ihm Gelegenheit den allgemeinen Lehrsatz von Gleichheit des Quadrates der Hypothenuse mit der Summe der Quadraten der Catheten zu erfinden. Es giebt aber auch noch andere Ziffern, welche dienlich sind ein rechtwinkelichtes Dreyeck aus drey Seiten nach ihrer Proportion zu gestalten. Pytagoras giebt dazu folgende Regel: Nehmt eine ungerade Zahl was ihr für eine wollt (z. B. 7), und sein Quadrat (49) vermindert um Eines; was überbleibt halbieret, so habt ihr die zweyte Zahl (24); vermehrt diese um Eines, so habt ihr (25) die dritte. Wirklich wenn man die Quadrate dieser Zahlen nämlich 49, 576, 625 miteinander vergleicht, findt man, daß das letzte der Summe der vorigen zweyen gleich sey.

Plato giebt diese Regel: Nehmt eine gerade Zahl, was ihr für eine wollt, (z. B. 10); halbieret sie, und von (25) dem Quadrate dieser halben Zahl (5) nehmt eines weg, so habt ihr (24) die zweyte; wenn

ihr

ihr aber eben dieses Quadrat um Eins vermehrt, so habt ihr (26) die dritte Zahl. Und wirklich die Quadrate dieser Zahlen sind 100. 576. und 676 und das letzte ist der Summe der zwey ersten gleich.

§. 396. Wenn in einem rechtwinkelichten Dreyecke, was immer für zwo Seiten gegeben werden, kann man die dritte durch Rechnung finden. 3.

Nennen wir die Hypothenuse H, den größern Cathetus C, und den kleinern c, so ist

Also 1. $H^2 = C^2 + c^2$ — 2. $H^2 = C^2 + c^2$

$H = \sqrt{(C^2+c^2)}$ — also $H^2 - c^2 = C^2$

also $\sqrt{H^2 - c^2} = C$

3. $H^2 = C^2 + c^2$

folglich $H^2 - C^2 = c^2$

also $\sqrt{H^2 - C^2} = c$

z. B. Es sey $C = 4$, $c = 3$ so ist $C^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$, und $H = \sqrt{25} = 5$. Wiederum es sey $H = 5$, $C = 4$, so ist $H^2 - C^2 = 25 - 16 = 9$; und $\sqrt{(H^2 - C^2)} = c = \sqrt{9} = 3$. Und endlich es sey $H = 5$, $C = 3$, so ist $H^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, und $\sqrt{(H^2 - c^2)} = C = \sqrt{16} = 4$.

§. 397. Weil das Quadrat der Hypothenuse den Quadraten beyder Catheten gleich ist, so muß es größer seyn als das Quadrat eines einzigen Cathetus (wenn nicht der andere unendlich klein ist). Ein größeres Quadrat aber hat auch eine größere Wurzel als ein kleineres. Folglich ist die Hypo- 3.

thenuse im rechtwinkelichten Dreyecke die gröſßte Seite, (wenn aber ein Cathetus unendlich klein wird, und also verschwindet, ist die Hypothenuse dem andern Cathete gleich).

Z. §. 398. Die Summe aber zweener Cathe-
ten miteinander (wenn nicht einer unendlich klein ist) ist gröſßer als die Hypothenuse. Denn wenn man von dem rechten Winkel D aus auf die Hypothenuse AB eine senkrechte Linie DE zieht, so ist AD gröſßer als das Stück AE; und BD gröſßer als das Stück EB; folglich AD + DB gröſßer als AE + EB, nämlich gröſßer als AB (§ 16).

Z. §. 399. Jetzt werden wir auch begreifen,
F3[2] daſß, was oben (§ 330) ist gemeldt worden, die Summe zwoer Seiten in jedem Dreyecke AB + AD gröſßer sey als die dritte Seite BD. denn wenn wir aus der Spitze A, die der gröſßten Seite BD gegenüber steht, einen Senkel BC herab lassen, sind die Dreyecke ACD, und ACB rechtwinkelicht (§ 306 § 217), und ist also AB gröſßer als CB, und AD gröſßer als DC, folglich gröſßer als DC + CB, das ist gröſßer als DB.

§. 400. Wenn man mit der Grundlinie
L. F33 B. AC eines Dreyeckes ABC eine Parallellinie ac ziehet, so ist das Dreyeck aBc dem Dreyecke ABC ähnlich. Denn es ist der Winkel Bac dem Winkel BAC, und der Winkel Bca den Winkel BCA gleich (§ 364): folglich das Dreyecke aBc dem Dreyecke ABC ähnlich (§ 381).

§. 401. Folglich ist AC:ac=AB:aB=BC:Bc (§ 384) 3.

und also AB : BC = aB : Bc (§ 178)

derowegen AB—aB:BC—Bc=aB:Bc (§182.2)

nämlich aA : cC = aB : Bc = AB : BC

Das ist, wenn man in was immer für einem Dreyecke mit der Grundlinie eine parallele zieht, so verhalten sich die abgeschnittnen Theile der andern zwo Seiten, *aA*, *cC* und *Ba*, *Bc* gegen einander wie die ganzen Seiten *BA*, *Bc*.

§. 402. Wenn man eine Seite BC eines 3.
Dreyeckes ABC in gleiche Theile, so viel man will, F34
zerschneidet, z. B. 5, nämlich BI, I II, II III, III IV, IVC, und zieht mit der Grundlinie AC Parallellinien 1I, 2II, 3III, 4IV, werden sich diese zu AC verhalten, wie BI, BII &c. zu BC. Es wird nämlich im gegenwärtigen Beyspiele 1I der fünfte Theil von AC, 2II zwey Fünftel, 3III drey Fünftel von AC seyn 2c.

§. 403. Auf den vorangehenden Zusatz ist die 3.
Verfertigung einer geometrischen Scale gegründet, F35
wodurch man gar kleine gleiche Theile einer geraden Linie geben kann. Eine willkührige macht man sich also.

1. Man zieht eine gerade Linie AE, und setzt von A in B zehen gleiche Theile von beliebiger Größe mit beständiger Umwendung des Zirkels darauf.

2. Die ganze Länge AB, setzt man in AE eben so, so oft man kann, hin.

3. Man

3. Man errichtet in A und E senkrechte Linien AD, und EF, und bringt auf jede derselben zehen Theile von beliebiger aber der nämlichen Größe.

4. Durch jede Theilungen der Linien AD und EF zieht man gerade Linien, die alle mit AE parallel sind, derer die äußerste DF ist.

5. Von D in C übersetzt man 10 Theile, die den Theilen von A in B gleich sind.

6. Man ziehet aus jedem Theilungspunete der Linie DC auf den nächstfolgenden von B in A eine gerade Linie, wie Cc &c. und schreibt die Ziffern hin, wie sie die Figur weiset: so ist die Scale fertig.

Wenn nun auf selber die Theile der Linie AB oder DC Schuhe bedeuten, so gilt AB für eine Ruthe: die Theile aber der Parallellinien die sich zwischen den Linien Cc, und CB befinden gelten für so viele Zolle, so viel die Ziffern, die zu äußerst nebst den Parallellinien stehen, andeuten.

A. §. 404. Eine gerade Linie von gegebner Größe (z. B. von einer Ruthe, 2 Schuhen und 3 Zollen) mit dem Zirkel auf der geometrischen Scale abzustechen.

Such auf der Linie DC die gegebne Zahl
a. der Schuhe (2), und in der Linie, die von dieser Zahl aus auf die nämliche schief hinunter gehet (2, 2), bemerke den Punct n dort, wo diese Linie von jener der mit DF parallelen Linien durchschnitten wird, bey der an der Linie DA die gegebne Zahl der Zolle (3) steht; in diesen Punct n setze einen Fuß deines Zirkels, den andern aber in den Punct m, dort nämlich, wo die lange Parallellinie, auf der der erste Fuß steht, von der mit AD

pa-

parallelen (I. I) durchschnitten wird, da die unten und oben beygesetzte Ziffern (I. I) die gegebne Zahl der Ruthen ausdrücken; so hat dein Handzirkel die gehörige Oeffnung.

§. 405. Auf dem Zusatze § 401 beruhet auch z. die Auflösung folgender Aufgabe: Eine gerade Linie ac in gleiche Theile, so viel man will, (z. B. in 3) zu theilen.

1. Setze auf eine gerade Linie von beliebiger doch hinlänglicher Länge, so viel gleiche Theile, als ac haben soll, aber grössere, AI, I II, II C, so, daß AC grösser wird als ac.

2. Mach über AC ein gleichseitiges Dreyeck ACB (§ 329) und aus der Spitze B die der Linie AC gegenüber steht, zieh auf ihre Eintheilungen gerade Linien BI, BII.

3. Mach Ba = Bc = der gegebnen Linie, und zieh durch die Puncten a und c die Linie ac, so ist sie durch die von B ausfließenden Linien in so viele Theile als AC getheilt.

Eben so, wenn AI zu AC was immer für eine gegebne Verhältniß hat, erlangt auch ai zu ac durch die schneidende Linie BI die nämliche Verhältniß.

VI. Ge-

VI. Gestaltung anderer rechtlinichter Figuren nebst einigen ihren Eigenschaften.

§. 406. Eine gleichseitige Figur nennt man
E. jede, die mit lauter gleichen Seiten begränzet ist; eine gleichwinkelichte, an der alle Seiten miteinander, (jede nämlich mit der nächst daranliegenden) einen gleichen Winkel machen.

§. 407. Eine viereckichte rechtwinkelichte
E. Figur ist die, deren Seiten miteinander lauter rechte Winkel machen; ein schiefwinkelichte aber, wenn sie nicht lauter rechte Winkel machen.

E. §. 408. Eine viereckichte gleichseitige rechtwin-
F36 kelichte Figur nennt man ein Quadrat. Ein läng-
F37 lichtes Recteck oder Rectangel nennt man eine viereckichte rechtwinkelichte Figur, in der nicht alle vier Seiten einander gleich sind.

E. §. 409. Eine Raute ist eine viereckichte gleich-
F38 seitige und schiefwinkelichte Figur; eine länglichte
F39 Raute eine viereckichte schiefwinkelichte Figur, de-
ren nur ihre entgegen gesetzte Seiten einander
F40 gleich sind. Ungleichseitige Vierecke nennt man
F41 jene Vierecke, deren entgegen gesetzte Seiten nicht alle einander gleich sind.

§. 410. Eine Figur, die mehr Seiten als 4
E. hat, nennt man ein Polygon oder Vieleck. Man nennt auch im weitläufigern Verstand jede geradlinigte Figur, also mit Einschluß der Drey- und
F42 Vierecke, ein Vieleck. Ein Fünfeck hat 5, ein
F43 Sechseck sechs Seiten. Hat eine Vieleck lau-

ter

ter gleiche Seiten, und Winkel, so nennt man es eine reguläre Figur, oder reguläres Vieleck; sonst aber ein irreguläres.

§. 411. Das Quadrat also ist eine reguläre Figur; ingleichen das in der 43ten Figur vorgestellte Sechseck; die übrigen aber nämlich 37, 38, 39, 40, 41, 42 sind irreguläre Figuren. Z.

§. 412. Auf eine gegebne Seite AB ein Quadrat zu beschreiben. N. F36

1. Man errichte an dem Puncte A eine Perpendicularlinie AC, die der Grundlinie AB gleich sey. a.

2. Von C und B aus mache man mit Stralen = AB zween Bögen, die einander in D durchschneiden, und ziehe die Linien CD und BD, so ist das Quadrat fertig.

Es ist klar aus der angegebnen Weise diese Figur zu gestalten, daß sie gleichseitig sey, also ist nur noch zu erweisen, daß sie rechtwinkelicht sey. Man ziehe die Diagonallinie CB: weil A ein rechter Winkel ist, so werden auch $o + m = 90°$ seyn (§ 378), und weil AC = AB, so ist $o = m$ (§ 335) $= 45°$: es ist aber $\triangle$ CBD $\cong$ $\triangle$ CBA (§ 332), und also der Winkel D = A 90°; der Winkel x aber, ingleichen der Winkel n jeder = 45°, folglich $m + n$, ingleichen $o + x = 90°$, also ist diese Figur rechtwinkelicht (§ 407) und ein Quadrat (§ 408).

§. 413. Es sind also alle Quadrate einander ähnlich (§ 279), und wenn man weiß, daß zwey Quadrate eine Seite miteinander gleich haben, so weiß man, daß auch sie einander gleich sind (§ 278). Z.

L. §. 414. In einem jeden Rechtecke sind die einander entgegen gesetzten Seiten einander gleich.

B. Weil in jedem Rechteckte jede Winkel rechte sind, so müssen die entgegen gesetzten Seiten einander parallel (§ 366), und also auch einander gleich seyn (§ 375).

U. §. 415. Aus zwoen gegebnen ungleichen geraden Linien AB, und AC ein länglichtes Rechteck zu gestalten.

a. 1. Man setze die zwo gegebnen Seiten AC und AB rechtwinkelicht zusammen.

F37 2. Von C aus beschreibe man einen Bogen D mit einem Strale = AB, und einen andern von B aus mit einem Strale = AC.

B. 3. Man ziehe auf D von C und B aus gerade Linien hin, so wird ABCD das verlangte Rectangel seyn.

Wir haben nur zu erweisen, daß alle Winkel rechte sind. Weil CD = AB, und AC = DB, und CB den Dreyecken ACB und CDB gemein ist, so ist △ ACB ≅ △ CDB, und auch D ein rechter Winkel, und x = m, o = n (§ 332): nun ist o + m = 90° (§ 378); folglich auch o + x = 90° (§ 15). Und eben so ist m + n = 90°: folglich sind alle Winkel rechte.

Z. §. 416. Es sind also alle Rechtecke, in denen die kleinere Seite zur grössern die nämliche Verhältniß hat, einander ähnlich (§ 279). Und, wenn die in einem den respondierenden in dem andern

gleich

gleich sind, sind diese Rechtecke einander gleich (§ 278).

§. 417. Aus einer gegebnen Linie *AB* und dem schiefen Winkel *A* ein Raute zu gestalten. F38

1. Errichte in A den gegebnen Winkel, und mach AC = AB.

2. Mit einem Strale = AB mach zweene Bögen C und B, die einander in D durchschneiden.

3. Zieh die Linien CD und BD, so ist die Raute fertig (§ 409.)

§. 418. Also sind alle Rauten, die einen respondierenden Winkel gleich haben, einander ähnlich (§ 279); und auch gleich, wenn sie eine gleiche Seite haben (§ 278). B.

§. 419. Aus zwoen gegebnen ungleichen Linien *AC* und *AB*, nebst dem eingeschloßnen schiefen Winkel *A* eine länglichte Raute zu gestalten. F39

1. Ziehe die Linie AB, und errichte in A den gegebnen Winkel A, und gieb auch dem Schenkel AC die gegebene Länge.

2. Beschreibe von C aus mit einem Strale = AB einen Bogen, und von B mit einem Strale = AC einen andern, der den vorigen in D durchschneide.

3. Ziehe gerade Linien BD und CD, so ist (§ 409) die länglichte Raute beschrieben.

B. §. 420. Wenn also in zwoen länglichten Rauten zwo Seiten mit eingeschloßnem gleichen Winkel, den zwoen respondierenden proportional haben, sind sie einander ähnlich (§ 279(; sind aber diese Seiten auch den respondierenden gleich, so sind auch diese länglichte Rauten selbst einander gleich.

E. §. 421. Ein Parallelogramm ist eine viereckichte Figur, deren einander entgegen stehende Seiten parallel sind.

L. 422. Das Quadrat, das länglichte Rechteck, die Raute, und die länglichte Raute sind Parallelogramme.

B. 1. Das Quadrat und länglichte Viereck sind rechtwinkelichte Figuren (§ 408), und ihre entgegen gesetzte Seiten sind von gleicher Länge (§§ 408, 403); folglich sind alle einander entgegen stehende Seiten parallel (§ 366), und diese zwo Figuren Parallelogramme.

2. Daß in der Raute und länglichten Raute die entgegen gesetzten Seiten von gleicher Länge
F38 seyn, bringt selbst ihre Erklärung mit sich (§ 409);
F39 also sind in selben die Dreyecke CAB und BDC einerley, und die Winkel m = x, o = n (§ 332); und also AB parallel mit CD, und AC parallel mit DB, (§ 364): also sind auch diese zwo Figuren Parallelogramme.

§. 423. Jedes Parallelogramm wird 1.
L durch die Diagonallinie CB in zwey ähnliche
EF und gleiche Dreyecke zerschnitten. 2. Ihre
36 einander entgegen gesetzte Seiten, 3. und auch
37 die entgegen gesetzten Winkel sind von gleicher
38 Größe.
39

In

In jedem Parallelogramme ist B.

AB parallel mit *CD*, und *AC* parallel mit *BD* (§ 421).

folglich m = x und o = n (§ 364).

und weil *CB* beyden Dreyecken gemein ist,

so ist

1. △ CAB ≅ △ BCD,
2. Und CD = AB,
   CA = BD
3. Und weil { o = n, x = m

Ist auch o + x nämlich C = m + n
= B

§. 424. Was in einem Vielecke einem gemei- E.
nen Winkel ACB von 360° mangelt, heißt ein F44
buckelter Winkel.

Also z. B. wenn ACB ein wahrer Winkel 80° hält, so hat der buckelte ACB = 360° — 80° = 289°

§. 425. Die Summe aller Winkel in einem L.
Polygone, wenn man statt der wahren die aus- F43
wärts sehen, ihre buckelte gelten läßt, ist = 180° × (n — 2), da n die Zahl der Seiten bedeutet.

z. B. Im Sechsecke 180° × (6 — 2) = 180° × 4 = 720°.

Es sey das Vieleck regulär oder irregulär, B.
so nehme man einen beliebigen Punct C in selbem an, und ziehe von selbem aus gegen jede Ecke gerade Linien, CA, CB, so haben wir so viele Dreyecke als das Polygon Seiten hat, und die Summe

aller

aller Winkel in allen diesen Dreyecken zusammen ist = 180° x n (§ 369); alle Winkel aber, die um den Punct C herum liegen, machen miteinander 180° x 2 = 360°: folglich ist die Summe aller Winkel des Polygons = (180° x n) — (180° x 2) = 180° x (n — 2)

Z. §. 426. Also ist in jedem regulären Polygone F43 der Polygonwinkel, den nämlich jede Seite mit der anliegenden macht, $= \frac{(180° \times n - 2)}{n}$ (§. 34 und 410).

z. B. Im Sechsecke $180° \times (6 - 2) : 6 = 180° \times \frac{2}{3} = 360 : 3 = 120°$.

Z. §. 427. Alle reguläre Polygone von gleich vielen Seiten (z. B. alle Sechsecke) sind einander ähnlich; ist aber in einem eine Seite (und folglich alle) so groß als in einem andern, so sind sie einerley.

Denn sie haben ähnliche Gränzen (§ 252 und 297); und gleiche, wenn die Seiten gleich sind: also ꝛc. (§ 324).

Z. §. 428. Die Gränzen der irregulären Polygone sind alle Winkel herum und alle Seiten, die unter den gegebnen Winkeln vereiniget werden; wenn also in zweyen Polygonen jede respondierende Winkel einander gleich sind, und jede respondierende Seiten miteinander in der nämlichen Verhältniß stehen, so sind sie einander ähnlich; sind aber die respondierenden Seiten und Winkel einander gleich, so sind auch die Polygone gleich.

§. 429. Die Diagonallinien, die man von 3.
einem Ecke eines Polygones zu einem andern zieht, F64
werden in ähnlichen Dreyecken auf ähnliche Art durch ähnliche Dinge, die man giebt (Seiten nämlich und Winkel) bestimmet; sind aber die Polygone einerley; so geschieht auch die Bestimmung der Diagonalen auf einerley Weise, durch einerley gegebne Dinge: also müssen in ähnlichen Polygonen die respondierenden Diagonallinien unter einander proportional (§ 279, § 384) und einerley seyn, wenn die Polygone einerley sind, (§ 278).

§. 430. Aus einer gegebenen Seite, und A.
der Zahl der Seiten ein regulares Polygon be- F43
schreiben.

1. Man berechne zu erst den Polygonwinkel a.
(§ 426), und setze an die gegebne Seite des Polygons AB, als eine Grundlinie zwo Linien AC, und BC (die in C einander durchschneiden werden) unter dem halben Polygonwinkel hin.

2. An AC setzet AD = AB, und so immer eine Seite an die andere hin, bis sie sich schließen.

Besser beschreibet man mit dem Strale AC, nachdem er durch Zeichnung (noch besser durch trigonometrische Rechnung) bestimmt ist, aus dem Mittelpuncte C einen Handzirkel, und trägt AB, so vielmal als viel es Seiten haben soll, darinnen herum.

VII. Von den Zirkelschnitten, der Peripherie des Zirkels und Umfange regulärer Polygonen.

§. 431. Eine gerade Linie, die man von einem E.
Puncte der Peripherie E zu einem andern F durch

den

F. I. den Zirkel zieht, heißt eine Senne (chorda); der Theil aber des Zirkels, der zwischen der Senne EF, und dem Bogen EHF (oder EGF) eingeschlossen ist, heißt ein Abschnitt (Segmentum).

§. 432. Es wird nämlich der Zirkel durch jede Senne in zweene Theile oder Abschnitte von gleicher Größe, wenn die Senne der Durchmesser ist; oder ungleichen, wenn sie eine andere ist, getheilet, (als hier ist der größere Abschnitt EGDF, der kleinere EHF): also treffen auch auf jede Senne zween Bögen, einer der größer (wenn sie nicht der Diameter ist), und ein anderer, der kleiner ist als ein halber Zirkel. Wir wollen, wenn mehr Senne miteinander verglichen werden, immer für jede den kleinern, oder für jede den größern verstehen, und die kleinere Bögen mit den kleinern, ingleichen die größeren mit den größern gleichartig nennen.

§. 433. In dem nämlichen Zirkel treffen

L. F45 1. auf gleiche Sennen gleiche gleichartige Bögen.

2. Und wenn die gleichartigen Bögen gleich sind, sind auch die Sennen gleich.

B. 1. Es seyn in dem nämlichen Zirkel zwo gleiche Sennen AB und BD, und man ziehe aus dem Mittelpuncte C die Stralen CA, CB, CD; so haben wir zwey Dreyecke ACB, und BCD, welche einerley sind, und es ist der Winkel m = n (§ 232): folglich sind auch ihre Maaße die Bögen AEB und BFD einander gleich. (§ 293, und § 294).

2. Es sey der Bogen AEB = BFD, und CA, CB, CD die Stralen, so wird m = n (§ 294); folglich △ ACB ≅ △ BCD, und AB = BD seyn (§ 340).

§. 434. Wenn ein Stral *nc* eine Senne

L. F47 *AB* mitten durchschneidet, schneidet er auch den Bogen *AnB* in der Mitte durch, und ist

auf

auf die Senne senkrecht. 2. Wenn der Stral ac auf die Senne senkrecht ist, durchschneidet er sie, und den Bogen *AnB* in der Mitte. 3. Und wenn eine gerade Linie *Dn* auf die Mitte einer Senne *AB* senkrecht ist, durchschneidet sie die Bögen *AnB* und *BDA* in der Mitte, nnd geht durch den Mittelpunct des Zirkels.

1. Es sey cn der Stral, und Am = mB, so muß auch AC = cB seyn (§ 271); nun cm ist beyden Dreyecken gemein, folglich ist △ Acm ≅ △ Bcm und o = x, und Amc = Bmc (§ 332), und der Bogen An = dem Bogen Bn (§ 264), und die Linie Cn durchschneidet AB senkrecht (§ 301 und § 306). B.

2. Wenn cn auf AB senkrecht ist, so wird Amc = Bmc = 90° seyn; und, weil AC = CB (§ 271) und cm = cm, so ist △ Acm ≅ △ Bcm, Am = Bm, und o = x (§ 348); und die Bögen Bn = nA (§§ 293, und 294).

3. Weil AmD = DmB, = Bmn = nmA = 90°, und Bm = mA, und Dm den Dreyecken DmB und AmD, mn aber den Dreyecken Bmn und Amn gemein ist, so ist △ DmB ≅ △ AmD, und △ Bmn ≅ △ Amn; und es sind die Sennen, folglich auch die Bögen DB = DA, und Bn = An (§§ 340, 433), also ist der Bogen DB + Bn = DA + An = einem halben Zirkel, und Dn der Diameter (§ 285), der durch den Mittelpunct c geht (§ 268).

§. 435. Am die halbe Senne des Bogens AnB, wird dieses halben Bogens An Sinus genennt; C.

nennt: Sie ist aber auch zugleich der Sinus des Bogens *AD*, der das halbe von dem Bogen *ADB* ist.

Z. §. 436. Es ist also jeder Sinus *Am* senkrecht auf den Stral cm, auf dem er in m aufsteht.

Z. §. 437. Also sind alle Sinusse, die auf dem F46 nämlichen Strale *CB* stehn, und alle Sennen, die von dem nämlichen Strale in der Mitte durchschnitten werden, einander parallel (§ 366).

Z. §. 438. Weil in dem nämlichen Zirkel oder auch in verschiednen von gleichem Strale gleiche Sennen auf gleiche Bögen treffen (§ 433), so müssen auch gleiche Sinusse auf gleiche Bögen treffen (§ 51).

E. §. 439. En der Sinus des Bogens *An*, wel- F48 cher Bogen des Bogens n*B* complement oder die Ergänzung zu 90° ist, heißt des Bogens n*B* Cosinus.

Z. §. 440. Weil *ACB*, und auch E und G rechte Winkel sind, (§ 436), so muß En mit CG, und EC mit nG parallel (§ 366); und also En = eG, und nG = CE (§ 359), und also auch CG der Cosinus des Bogens n*B*, und EC der Cosinus des Bogens *An* seyn.

E. §. 441. G*B* der Theil des Strals zwischen dem Bogen n*B*, und seinem Sinus nG heißt Sinus Versus des Bogens n*B*.

Z. §. 442. Der Sinus Versus also ist der Unterschied zwischen dem Strale und Cosinus eines Bogens, beyde miteinander machen den ganzen

Stral

Stral aus; und also trift auf jeden Sinus ein Cosinus und Sinus Versus.

§. 443. Durch drey Puncte, die nicht in A. einer geraden Linie liegen, einen Zirkel beschreiben.

1. Beschreibe aus *A* und *B* mit beliebigem aber A.
dem nämlichen Strale zweene Bögen, die einan- F49
der in E durchschneiden; und eben so, zweene andere, die einander in F durchschneiden; so wird die Linie FE die Linie *AB* in der Mitte senkrecht durchschneiden: denn weil in dem Dreyecke *AEB* die Winkel *A*, und *B*, (§ 350), und also diese auch in den Dreyecken *EB*m und *EA*m einander gleich, und nebst ihnen die Seiten *EB* = *EA*, und *E*m = *E*m sind, so sind diese Dreyecke einerley, und ist *B*m = *A*m, und Em *B* = Em *A* (§ 348): also muß EF, wenn man sie lang genug macht, durch den Mittelpunct des Bogens *BA*, folglich des Zirkels BD*A* gehen (§ 434).

2. Eben so beschreibe aus *B* und D mit beliebigen Stralen die Bögen H und G, und ziehe die Linie GH, welche gleichfalls durch den Mittelpunct des Zirkels als Mittelpunct des Bogens *BD* gehen muß: also muß dieser in C seyn, wo die Linien HG und EF einander durchschneiden.

3. Aus dem Mittelpuncte C läßt sich nun mit dem Strale C*A* ein Zirkel *ABDA* beschreiben.

§. 444. Folglich kann man sich jedes Drey- A.
eck, als wäre es mit seinen Ecken in der Peripherie eines Zirkels, vorstellen. Denn man kann um jedes einen Zirkel durch seine drey Ecke *A*, *B*, *D*

beschreiben, und wird alsdann jede Seite die Senne des dem entgegen gesetzten Winkels gegenüber stehenden Bogens seyn.

z. B. Dem Winkel D, der der Seite AB entgegen gesetzt ist, steht auch der Bogen AB gegenüber, dessen Senne AB ist.

Z. §. 445. Also verhalten sich in jedem Dreyecke, die Seiten gegeneinander, wie die Sennen der Bögen des darum beschriebenen Zirkels, auf dem die entgegen gesetzten Winkel mit ihren Schenkeln aufstehen: derowegen muß auch in jedem Dreyecke die größere Seite dem größern Winkel, und die kleinere dem kleinern gegenüber stehen.

L. §. 446. Die Bögen eines Zirkels *AG* und
F51 *eF* zwischen zwo Parallellinien *AF* und *Ge* sind einander gleich.

B. Man ziehe mit der Senne AF eine parallele durch den Mittelpunct C, und setze, es gehen aus den Puncten A und F auf af senkrechte Linien zu, so werden diese von gleicher Länge (§ 359) und der Bögen Aa und Ff Sinusse seyn (§ 436); folglich sind die Bögen Aa und Ff einander gleich (§ 438). Nun zeigt man eben so, daß die Bögen Ga und ef einander gleich seyn, also ist auch Ga — Aa = ef — Ff, das ist, GA = eF.

L. §. 447. Wenn zwo Sennen *AF*, *BE* ein-
F50 ander innerhalb dem Zirkel in *D* durchschnei-
F51 den, so wird der Winkel *ADB* (= *EDF*) die halbe Summe der gegenüber stehenden Bögen *AB*, und *EF* zum Maaße haben.

1. Setzen wir, der Durchschnitt geschehe in dem Mittelpuncte C; so ist klar, daß der Bogen AB des Winkels ADB, und der Bogen EF des Winkels EDF (§ 294), und also beyde Bögen, oder AB + EF, beyder Winkel Maaß seyn: da dann diese Winkel gleich sind (§ 313), so ist eines jeden Maaß $= \frac{1}{2}(AB + EF)$ F50

2. Setzen wir der Durchschnitt geschehe außer dem Mittelpuncte, und ziehen durch den Mittelpunct C zweene Diameter nämlich af mit AF und eb mit EB parallel; so wird der Winkel ADB dem Winkel aCb gleich seyn (§ 364), nun dieser (wie wir erst gesehen haben) folglich auch jener hat zum Maße $\frac{1}{2}(ab + ef)$. Es ist aber $Aa = Ff$, und $bB = eE$ (§ 446): F51

Also AB = Ac + ab + bB (§ 16)
= Ff + ab + eE (15)
EF addiere.

Folglich AB+EF = Ff+ab+eE, EF (§ 44)
= eE+EF+Ff+ab (andere Ordnung.)
= eF +ab (§ 26)

Also $\frac{1}{2}(AB+EF) = \frac{1}{2}(ab + ef)$ (§ 51)
Nun ist $\frac{1}{2}(ab + ef)$, folglich auch $\frac{1}{2}(AB+EF)$ das Maaß des Winkels D.

§. 448. Wenn D in die Peripherie fällt, verschwindt der Bogen EF, und wird der halbe Bogen AB das Maaß des Winkels ADB. So viel also immer Winkel an der Peripherie als z. B. *D*, *C*, *G*, auf dem nämlichen Bogen *AB* mit ihren Schenkeln aufstehen, sind sie alle einander gleich (§ 294), und da der halbe Halbzirkel ein 2. F51 F52

Qua-

F54 Quadrant ist, so hat der Winkel an der Periphe-
rie, welcher auf einem halben Zirkel steht, zum
F52 Maaße einen Quadranten, und ist ein rechter
F54 Winkel: der aber auf einem kleinern Bogen
steht, ist ein spitziger; der auf einem größern,
ein stumpfer Winkel.

F. §. 449. Folglich muß der Winkel, der der
F55 größten Seite in einem Dreyecke, dessen Winkel
in einem kleinern Bogen als halben Zirkel an die
Peripherie kommen, gegenüber steht, jederzeit ein stum-
pfer seyn: und jedes stumpfwinkelichte Dreyeck
läßt sich in einem solchen Bogen beschreiben, oder
damit also umgeben, daß alle seine Winkel an die
Peripherie kommen.

E. §. 450. Wir wollen den kleinern Bogen
F55 ADB, der einer Senne AB zugehört in folgendem
Lehrsatze den ersten heißen, um ihn von dem grö-
ßern BEA, der ihr auch zugehört, als dem andern
zu unterscheiden.

L. §. 451. In dem nämlichen Zirkel trift auf
eine größere Senne ein größerer, auf eine klei-
nere ein kleinerer erster Bogen.

B. Es sey der kleinere erste Bogen AD, der grö-
ßere AD + DB nämlich AB, und also jenes Senne
die gerade Linie AD, des andern AB: Weil der
Bogen ADB kleiner ist als ein halber Zirkel, so ist
der Winkel ADB ein stumpfer Winkel (§ 448):
errichten wir also aus D auf AD die Perpendicu-
larlinie Dm, so wird ADm ein rechter Winkel und
Am größer als AD (§ 397), also noch viel mehr
Am + mB nämlich AB größer als AD seyn.
Das ist, auf den größern ersten Bogen wird eine
größere Senne als auf einen kleinern treffen.

§. 452.

§. 452. Folglich ist der Diameter die größte Senne, und der Sinus des Quadranten (der Stral nämlich) den man den ganzen Sinus (Sinus totus) nennt, ist der größte Sinus in einem Zirkel, und je näher ein Bogen zum Quadranten kömmt, je größer ist auch sein Sinus. B.

§. 453. *AB* die Senne von 60° ist dem Strale gleich. Denn zieht von den Enden der Senne von 60°, nämlich von A, und B, Stralen AC, und BC auf den Mittelpunct zu, so werden die Winkel A und B in dem Dreyecke ACB einander gleich (§ 350), und da C = 60° ist (§ 293), ihre Summe, = 120°, also auch jeder = 60°, und das Dreyeck ACB gleichwinkelicht, folglich gleichseitig (§ 352), und also AB die Senne von 60° dem Strale AC gleich seyn. L. F43 B.

§. 454. Man kann also den Stral in der Peripherie sechsmal herumtragen, und er ist die Seite des regulären Sechseckes. B.

§. 455. Der Sinus *ED* ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Sinus Versus *BE*, und der Summe aus dem Cosinus *CE*, und dem Strale *CA*, es ist nämlich $ED^2 = AE \times BE$. L. F54

Denn der Winkel ADB ist ein rechter (§ 448), und ED steht senkrecht auf dem Diameter AB (§ 436): also ist ED die mittlere Proportionallinie zwischen BE, und AE (§ 392) (= AC + CE), das ist, zwischen dem Sinus Versus, und der Summe aus dem Strale AC, und Cosinus CE. B.

§. 456.

Z. §. 456. Der Sinus Verſus iſt alſo die dritte Proportionallinie zur Summe aus dem Strale AC, und dem Coſinus CE, und zu dem Sinus DE: es iſt nämlich (AC + CE): DE = DE: EB.

Z. §. 457. Weil in dem rechtwinkelichten Dreyecke CnG der Radius Cn die Hypothenuſe iſt, der Sinus aber nG und Coſinus CG die Catethen ſind; ſo läßt ſich, wenn der Stral und Sinus gegeben ſind, ſein Coſinus, oder wenn der Stral und Coſinus gegeben ſind, dieſes ſein Sinus (§ 396) berechnen. Daraus kann man alsdann auch den Sinus Verſus durch Rechnung beſtimmen. (§ 456).
F48

Z. §. 458. Aber auch die Senne BD als Hypothenuſe im Dreyecke BED erhalten wir, wenn der Sinus DE und Sinus Verſus EB zuvor gefunden ſind (§ 396); deren halber Theil der Sinus des halben Bogens BD iſt. Dahero wenn eine Senne oder Sinus eines Bogens bekannt iſt, kann man leicht daraus die Senne, oder den Sinus des halben Bogens berechnen; und alſo hat man Sennen und Sinus immer kleinere und kleinere, nämlich für immer kleinere halbe Bögen finden können.
F54

L. §. 459. Die Senne was immer für eines Bogens *Bn* iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Diameter *Dn*, und *mn* dem Sinus Verſus des Bogens *Bn*.
F47

B. Denn man ziehe von n aus durch den Mittelpunct c den Diameter nD, ſo iſt der Bogen nD ein halber Zirkel (§ 284) und der Winkel nBD ein rechter (§ 448). Laſſe man nun aus B, auf den Diameter nD eine Perpendicularlinie Bm fallen,

len, so wird diese der Sinus (§ 436), und nm der Sinus Versus (§ 441) des Bogens nB seyn. Nun ist nB die mittlere Proportionallinie zwischen nD und nm (§ 392); und eben diese Linie nB ist die Senne des Bogens nB; also ist diese Senne die mittlere Proportionallinie zwischen dem Diameter nD, und nm dem Sinus Versus des Bogens nB.

§. 460. Wenn ein Sinus unendlich klein ist, so trift er in den Bogen ein, dessen er Sinus ist, und sein Cosinus ist der Stral selbst. L.

Weil die Linie *AE* gröſser als der Stral, und doch kleiner als der Diameter ist, ist sie in Vergleich mit dem Strale eine endliche Gröſse, die wir wollen a heiſsen: den Sinus DE also, weil er in Vergleich mit dem Strale unendlich klein angenommen wird, werden wir durch $\frac{a}{\infty}$ ausdrücken können (§ 235): nun ist $DE^2 = EB \times AE$ (§ 393) und also $EB = DE^2 : AE$. Oder $\frac{a^2}{\infty^2} : a =$ F.54 B.

$\frac{a}{\infty^2}$ eine Unendlichtheilchen der zweyten Ordnung (§ 236), welches im Vergleich eines Unendlichtheilchen der ersten Ordnung verschwindet (§ 339): wenn also der Sinus DE unendlich klein wird, so verschwindt der Sinus Versus gegen ihm, und wird der Cosinus dem Strale gleich.

§. 461. Es muſs also auch eine unendlich kleine Senne in ihren Bogen treffen, und eine Linie, die man aus dem Mittelpuncte senkrecht auf diese Senne Zieht, ist der Stral selbst: Man kann 3.

also den Zirkel als ein regulâres Vieleck betrachten, daß mit unendlich vielen aber unendlich kleinen Sennen als seinen Seiten begränzet ist; und die Peripherie kann als der Umfang dieses Vieleckes angesehen werden.

3. §. 462. Wenn aber ein regulâres Vieleck nur aus einer endlichen obwohl sehr großen Zahl Seiten besteht, so ist es kleiner als der Zirkel, den man darum beschreiben kann, und hat auch einen kleinern Umfang als die Peripherie des Zirkels ist; und je weniger selbes Seiten hat, je kleiner wird es gegen dem Zirkel; je mehr es aber Seiten hat, je mehr nähert es sich demselben, und sein Umfang der Peripherie: denn der Sinus Versus EB wird in Vergleich des Sinus DE immer kleiner, je kleiner man den Sinus Versus EB macht, sonst würde er nicht endlich verschwinden.

8. §. 463. Es ist klar, daß man den Umfang eines regulâren Vieleckes findet, wenn man eine Seite desselben durch die Zahl der Seiten multiplicieret (§ 410): also muß auch die Peripherie eines Zirkels beynahe gefunden werden, wenn man eine Seite, oder kar kleine Senne eines regulâren Vieleckes von sehr vielen Seiten, mit der Zahl derselben multiplicieret: weiß man also die Verhältniß des Strals zu einer dieser Sennen, so findt man leicht seine Verhältniß zur Summe von allen, die man kann für die Verhältniß des Strals zur Peripherie gelten lassen.

§. 464. z. B. Die Seite des Sechseckes ist dem Stral des Zirkels gleich, folglich sein Umfang zum Strale wie 6 : 1, und zum Diameter wie 3 : 1. Wenn also der Diameter = 1, muß nothwendig die Peripherie gröser seyn als 3. Suchst du die Seite des Zwölfeckes, das ist,

die

die Senne des halben Bogens, der den Stral zur Senne hat, so wirst du durch Rechnung (§ 458) finden, daß sich diese zum Strale verhält wie 517, 65 zu 1000; wenn du nun diese Zahl mit 12 multiplicierest, so bekömmst du den Umfang des Zwölfeckes 6211, 68; folglich verhält sich der Stral zum Umfange des Zwölfeckes beynahe wie 1000 zu 6212, und der Diameter zu diesem Umfange beynahe wie 1000 zu 3106, diese Verhältniß kömmt nun schon viel näher zur Verhaltniß des Diameters zur Peripherie. Wenn du nun immer so fortfahren wolltest die Seiten des Vieleckes zu verdoppeln, und die Verhältniß des Strals zum Umfang zu suchen, und selben für die Peripherie des umschriebenen Zirkels gelten zu lassen, würdest du immer näher zur wahren Verhältniß des Strals zur Peripherie kommen, doch sie nicht völlig erreichen. Und auf diese Weise hat schon vor alten Zeiten aus dem Polygon von 96 Seiten eines umschriebenen, und darinnen beschriebnen Vieleckes die Verhältniß des Diameters zur Peripherie bey nahe = 7 : 22 Archimedes gefunden; aber dabey wird die Peripherie ein wenig zu groß: genauer ist die gewöhnlich gebrauchte Verhältniß wie 100 zu 314, dabey aber die Peripherie ein wenig zu klein wird: Aber viel genauer ist diese 113 : 355, bey der man, wenn der Diameter von einer Million Schuhe ist, die Peripherie zwar ein wenig zu groß doch nicht um zweene Zolle zu groß wird. Ludolph von Ceulen hat die genaueste Proportion aber mit langen Zahlen von 36 Ziffern gegeben, deren die ersten sechs folgende sind 100000 : 314159.

§. 465. Es sey gegeben der Diameter z. B. 7 Schuhe, man soll seine Peripherie suchen. Im gleichen es sey die Peripherie gegeben, man soll den Diameter suchen. U.

Sprich: wie 100 : 314 also verhält sich der gegebne Diameter 7^{I} zur gesuchten Peripherie, und du findest sie (§ 185) $= 21^{I}, 9^{II}, 8^{III}$ also beynahe 22^{I}. a.

Wenn man die Peripherie gibt 22^{I}, und den Diameter sucht, sprich: wie 314 : 1000 also 22^{I}

zum

zum gesuchten Diameter, und du findest ihn = 7^{I}, 0^{II}, 0^{III}, 6^{IIII}.

§. 466. Wenn man die Peripherie eines Zirkels von sehr großem Durchmesser sucht, und die Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie nicht mit größern Zahlen ausdrückt, wird der Fehler viel zu merklich: allein mit großen Zahlen ist die Rechnung gar beschwerlich, derowegen wird es besser seyn, durch Hilfe der Logarithmen aus dem Diameter die Peripherie, oder jenen aus dieser zu suchen. Ich habe aber durch besondere Rechnung gefunden, daß der genaueste Logarithmus, den man mit zehen Ziffern die Verhältniß des Diameters zur Peripherie auszudrücken, geben kann, dieser sey: 0, 4971498726. Davon behalte so viel Ziffern, als viele deine Tabellen über die Charakteristika haben; doch die letzte vermehre um Eins, wenn das nächstfolgende nicht unter 5 ist: wenn also deine Tabellen 7 Ziffern über die Charakteristika haben, so bediene dich des Logarithmus 0, 4971 499; wenn sie nur 4 haben, des folgenden 0, 4971.

A. §. 467. **Aus der gegebnen Peripherie den Diameter oder jene aus diesem durch Logarithmen zu suchen.**

E. I. z. B. Es sey gegeben der Umkreis der Erde 5400 geographische Meilen, so suche den Logarithmus dieser Zahl; von diesem ziehe alsdann den Logarithmus der Verhältniß des Diameters zur Peripherie ab, und die Differenz wird der Logarithmus des gesuchten Diameters, die ihm beykommende Zahl aber der Diameter selbst seyn.

Aus den gemeinen Tabellen	3. 7323938 Log. von 5400
Verhältniß Logarith.	0. 4971499
Differenz	3. 2352439
Dem die Zahl	1718, 839 zukömmt.

Um

Um auch aus der hinten angehängten Tabelle ein Beyspiel zu geben sey die Peripherie 22, wir wollen den Durchmesser suchen.

22 Log. 1. 3424
0. 4971

0. 8453

Mit dem am nächsten die Zahl 7 übereins kömmt.

2. Wenn man den Diameter giebt, z. B. 1718, 839, so suche den Logarithmus dieser Zahl; dazu addiere den Logarithmus der Verhältniß des Diameters zur Peripherie; so wird der Logarithmus der Peripherie heraus kommen, und die dazu gehörige Zahl die Peripherie geben.

1718, 839 Logarithmus 3. 2352439
Verhält. Logar. 0. 4971499

Summe 3. 7323938

Die dazu gehörige Zahl ist 5400

Wiederum des Diameters 7 Logar. 0. 8451
0. 4971

1. 3422

Dafür gehört nächstens 22

Weil aber doch der Logarithmus von 22 ein wenig größer ist als dieser, so nimmt man daraus ab, daß die Peripherie ein wenig kleiner sey als 22.

§. 468. Wenn zwo Sennen *AD* und *BC* einander innerhalb dem Zirkel in *M* durchschneiden, so werden ihre Abschnitte gegeneinander in verkehrter Verhältniß seyn. F52

Setzen wir noch zwo Linien BD und CA hinzu, daß wir zwey Dreyecke nämlich AMC und BMD bekommen, so ist $AD_B = AM_B$, (§ 448) B.
und $AMC = BMD$, (§ 313)

Folg.

Folglich $\triangle$ AMC $\backsim$ $\triangle$ BMD (§ 381)
und MC : MD = AM : M_B (§ 384).

$$= \frac{1}{M_B} : \frac{1}{Am} \text{ (§ 180.10)}$$

welches die verkehrte Verhältniß von M_B : AM ist.

L. F56 §. 469. Wenn zwo Sennen *AE*, *BF* über den Zirkel hinaus verlängert werden, bis sie einander in *D* erreichen, so ist das Maaß des Winkels *ADB* = der halben Differenz der zwischen ihnen liegenden Bögen *AB* und *EF*.

B. Man ziehe mit der Senne AE eine Parallellinie cF durch den Punct F, da die Senne den Zirkel durchschneidet, so ist der Winkel

$$ADB = cFB \text{ (§ 364)}$$

der halbe Bogen $cB = cFB$ (§ 448)

also $ADB = \frac{1}{2} cB$

II

$cB = AB - AC$
$AC = EF$ (§ 446)

also $cB = AB - EF$

und $\frac{1}{2} cB = \frac{AB - EF}{2}$

III

$ADB = \frac{1}{2} cB$ (I)
$\frac{AB - EF}{2} = \frac{1}{2} cB$ (II)

ADB

also $AD B = \frac{AB - EF}{2}$

§. 470. Folglich sind die Dreyecke ADF, 3.
und EDB, weil sie den Winkel D gemein haben, und $A = B$ ist (§ 448), einander ähnlich, und ist $DF : DE = DA : DB$, welches die verkehrte Verhältniß von $DB : DA$ ist: also die Theile der den Zirkel durchschneidenden und bis sie einander erreichen, fortgezognen Sennen außer dem Zirkel sind mit diesen ganzen Linien in verkehrten Verhältniß.

§. 471. Wenn man aus dem Winkel *A* in 4.
was immer für einem Dreyecke, der der größ- F32
ten Seite *DB* gegenüber steht, mit der kleinsten Seite als einem Strale *AD* einen Zirkel beschreibt, so verhält sich die längste Seite *BD* zur Summe der übrigen zwoen *BA* + *AD*, wie die Differenz dieser Seiten *AB* — *AD* zum Theile der größten Seite außer dem Zirkel *B n*.

Denn man verlängere zu erst BA bis in E, so 8.
ist $AE = AD$; folglich $EB = BA + AD$.

Und weil $AD = Am$, so ist $mB = AB - Am = AB - AD$; also haben wir nur zu erweisen, daß $BD : BE = Bm : Bn$ sey. Nun des Winkels Dnm Maaß ist der halbe Bogen DEm; des Winkels mED Maaß ist der halbe Bogen Dnm:
(§ 448)
also beyder Winkel Maaß ist ein halber Zirkel = 180° Bnm + Dnm = 180°: (§ 302)

also mED + Dnm = Bmn + Dnm : (§ 43)

folglich mED = Bmn. (§ 47)
der Winkel B ist dem △ Bmn und dem △ BDE gemein:

also die Dreyecke Bmn und BDE haben zweene gleiche Winkel:

folglich △ Bmn ∽ dem △ BDE : (§ 381)

also BD : BE = Bm : Bn (§ 384)

E. §. 472. Wenn eine gerade Linie DG eine
F57 krumme Linie nicht in zwo Puncten durchschneidet, noch ganz außer ihr ist, sondern in einem einzigen Puncte in sie fällt, so sagt man, die krumme Linie werde von ihr berühret, und heißt sie eine Tangente der krummen Linie.

§. 473. Lassen wir eine gerade Linie von unbestimmter Länge z. B. durch einen Zirkel, und zwar erstlich durch den Mittelpunct gehen, so wird der Theil, den beyderseits von dieser Linie die Peripherie des Zirkels abschneidt, AB der Diameter seyn, wenn alsdann diese Linie gegen F sich hinaufbewegt, so, daß sie immer ihr selbst parallel bleibt, so wird der Theil derselben innerhalb dem Zirkel immer kleiner werden, je weiter sie sich vom Diameter gegen F entfernet; die Bögen aber AD und Bg bleiben immer einander gleich (§ 446). Endlich ehe diese Linie gar aus dem Zirkel geht, wird das, was noch darinnen ist, nämlich die letzte Senne unendlich klein, weil die Puncte d und g, da die Linie in F kömmt, in einen Punct zusammen fließen: und also verschwindet sie gar, wenn diese Linie den Zirkel nur berühret, und nicht mehr schneidet, (die Bögen AF und BF werden zwar einander gleich seyn, weil Ad und Bg gleich bleiben bis d in g fällt.) Derowegen kann man die Tangente z. B. des Zirkels als eine außer demselben verlängerte Senne eines unendlich kleinen Bogens ansehen: geht aber die Linie DG noch weiter hin-

hinaus, so ist sie ganz außer ihm, und wird ihn weder mehr berühren, noch schneiden.

§. 474. Wo man also immer eine Senne dg in dem Zirkel mit einer Tangente *DG* parallel zieht, werden allezeit die Bögen *dF* und *gF* die zwischen der Senne und dem Berührungspuncte *F* sich befinden einander gleich seyn: denn AF ist = BF, und Ad = Bg; also auch dF = gF (§ 47). Z.

§. 475. Also ist der Stral *CF*, den man auf den Berührungspunct *F* hinzieht, senkrecht auf die Tangente: denn da die Bögen AF und BF einander gleich, und also Quadranten sind, so ist der Winkel ACF, der AF zum Maaße hat, ein rechter; und folglich auch CFG, der dem ACF gleich ist (§ 364), ein solcher. Z.

§. 476. Der Winkel *dFD*, den die Senne *dF* mit der Tangente *DF* in dem Berührungspuncte *F* macht, hat zum Maaße den halben Bogen *dF*, den die Senne *dF* abschneidet. L.

Man ziehe dg mit DG parallel, so ist der Winkel dFD = Fdg (§ 364): nun dieser, also auch jener hat zum Maaße den halben Bogen gF (§ 448), oder, weil gF = dF ist (§ 474), den halben Bogen dF. B.

§. 477. Wenn also eine gerade Linie *DA* den Zirkel durchschneidet, eine andere *Dm* aber ihn berühret, wird die Tangente *Dm* die mittlere Proportionallinie seyn zwischen der ganzen schneidenden *DA*, und dem Stücke, das außer dem Zirkel ist, *DE*. Denn der halbe Bogen Em ist das Maaß des Winkels mAE (§ 448), und Z. F 36

des Winkels EmD, und also sind diese einander gleich, der Winkel D aber ist den Dreyecken ADm und mDE gemein; folglich sind sie ähnlich, und verhält sich AD : Dm = Dm : DE; Dm ist also die mittlere Proportionallinie zwischen AD und DE.

E. §. 478. Wenn man den Stral Cn verlän-
F48 gert, bis er in m an die Tangente Bm stößt, so wird Cm die Tangente, Bm aber die Secante des Bogens nB genannt. AM aber die Tangente des Bogens An, der das Complement des Bogens nB zu 90° Grad ist, heißt dieses Bogens nB Cotangente; und die Secante von An, nämlich CM, ist des Bogens Cm Cosecante. Die Tangenten und Secanten der Zirkelbögen gelten zugleich für Tangenten und Secanten der Winkel, derer Maaß diese Bögen sind.

Z. §. 479. Da die Winkel G (§ 436) und B (§ 475) rechte Winkel sind, und der Winkel C den Dreyecken CGn und CBm gemein ist, so müssen diese einander ähnlich seyn: folglich wie sich verhält *CG* der Cosinus des Bogens *nB* zum Sinus *nG*, also verhält sich der Stral oder ganze Sinus *CB* zur Tangente *mB*: und wie sich verhält *CG* der Cosinus des Bogens *nB* zum ganzen Sinus oder Strale *Cn*, also verhält sich der ganze Sinus oder Stral *CB* zur Secante *Cm*.

Nämlich CG : nG = CB : mB
und CG : Cn = CB : Cm

Z. §. 480. Wenn man also die Sinusse für den ganzen Quadranten gefunden hat, kann man auch

die

die Tangenten und Secanten durch die Regel De-
tri finden.

§. 481. In jedem Dreyecke verhält sich die Summe ieder zwoer Seiten $AC + CB$ zu ihrer Differenz $AC - CB$, wie die Tangente der halben Summe der Winkel B und A, die den Seiten AC, und BC gegenüber stehen, zur Tangente der halben Differenz dieser Winkel. E. F. S.

Man nehme die kleinere selber zwoer Seiten B. BC als einen Stral, und beschreibe damit aus dem Winkel C, denn sie miteinander machen, als einem Mittelpuncte ein Zirkel; so ist klar, das $EA = CA + CE = CA + CB$ die Summe selber zwo Seiten, und $FA = CA - CF = AC - CB$ ihre Differenz sey. Nun ziehe man durch E und B eine gerade Linie EH von unbestimmter Länge, und aus A eine andere AH senkrecht darauf, damit wir in A einen rechten Winkel haben; man ziehe auch von F in B eine Linie; so wird auch FBE (weil EC durch das Centrum geht, und also EBF ein halber Zirkel ist) ein rechter Winkel (§ 448),

und also BF mit HA parallel seyn (§ 366).

---

folglich ist $\triangle EBF \sim \triangle EHA$ (§ 400);
und $EA : FA = EH : BH$ (§ 401).

II.

Wegen dem rechten Winkel H, wenn man AH als den Stral oder ganzen Sinus annimmt, ist

EH die Tangente von EAH,

und BH die Tangente von BAH;

folglich EH : BH = Tang von EAH : Tang BAH,
EAH = EFB (§ 364) = CBF (§ 315), denn CB ist = CF;
$= \frac{1}{2}$ ECB, denn ECB ist = CBF + CFB (§ 380);
$= \frac{1}{2}$ (CAB + CBA), denn ECB ist = CAB + CBA (§ 380);
BAH = FBA (§ 364), weil BF mit HA parallel ist;
$= \frac{1}{2}$ GCF, denn GCF hat den ganzen Bogen GF,
FBA aber oder FBG nur den halben Bogen GF zum Maaße.

---

also ist EH : BH = Tang (CAB + CBA) : Tang von $\frac{1}{2}$ GCF.
(§ 15)

III.

(GCA oder GCF) + CAG ist = CGB (§ 379) = CBG (§ 350)
oder CBA, weil CB = CG;

Folglich GCF = CBA — CAG;

---

also $\frac{1}{2}$ GCF = CBA — CAG oder CAB

2

IV.

EH : BH = Tang (CAB + CBA) : Tang von $\frac{1}{2}$ GCF (II)
CBA — CAB = $\frac{1}{2}$ GCF (III)

2

Also ist EH : BH = Tang. (CAB + CBA) : Tang $\frac{\text{CBA} - \text{CAB}}{2}$;
EH ; BH = EA : FA. (1).

Folglich EA : FA = Tang (CAB + CBA) : Tang $\frac{\text{CBA} - \text{CAB}}{2}$

Das ist: die Summe der Seiten AC + BC verhält sich zur Differenz derselben, wie die Tangente der Summe der Winkel A und B zu ihrer halben Differenz.

VIII. Vom Innhalt der Flächen geradlintchter Figuren, und der Zirkel.

§. 482. Eine Figur oder Fläche **Quadriern** heißt so viel als finden, wie viel sie Quadratruthen, Quadratschuhe, und Quadratzolle ꝛc. hat. Man nennt aber eine Quadratruthe ein Quadrat, das zur Seite eine Ruthe hat; eben so einen Quadratschuhe ein Quadrat, dessen Seite ein Schuh ist, und einen Quadratzoll ein Quadrat, dessen Seite ein Zoll ist ꝛc. E.

§. 483. Wie wir nämlich alle Linien auch krumme durch Vergleichung mit gerader Linien von gewisser gegebner Größe ausmessen, eben so messen wir alle Flächen mit Vergleichung gewisser gegebener nämlich gewisser Quadrate, weil die Quadrate dazu die bequemste Figur sind.

§. 484. Den Flächeninnhalt eines Quadrates zu finden. A.

1. Messe die Seite AB a.

2. Multipliciere sie mit sich selbst; das Product, ist der Innhalt des gegebnen Quadrates. F59

z. B. Es sey AB = 3 Linien, so wird die Quadratfläche = 9 Quadratlinien seyn.

So viel nämlich die Seite AB Linien lang ist, so viel Quadratlinien stehen an ihr an, und machen miteinander die erste Reihe aus: so viel aber Linien AC lang ist, so viel kommen solche Reihen im Quadrate hintereinander, also findet man die Zahl aller Quadratlinien, aus denen das ganze Quadrat CB besteht, wenn man AB mit AC, oder weil hier AB = AC ist, AB mit sich selbst multiplicieret. B.

B. §. 485. Wenn man also die Seite der Quadrate zu messen sich der Eintheilung der Ruthen in 10 Schuhe der Schuhe in 10 Zolle ꝛc. bedient, so ist klar, daß die Quadratruthe 100 Quadratschuhe, und der Quadratschuh 100 Quadratzolle ausmachen müsse: bedient man sich aber zum Maaße der Seiten des zwölftheiligen Maaßes, da die Ruthe 12 Schuhe hält, so hat die Quadratruthe 12 X 12 nämlich 144 Quadratschuhe, der Schuh 144 Quadratzolle ꝛc.

§. 486. Die zehentheilige Messerey ist zu den Rechnungen viel bequemmer, weil bey dieser leicht ist eine gegebene Zahl Ruthen in eine Zahl von Schuhen oder Zollen zu verwandeln: denn setzt man zwey Nulle zur Zahl der Ruthen, so haben wir die Zahl der Schuhe; setzt man noch ein paar hin, so hat man die Zahl der Zolle; und wenn das dritte paar hingesetzt wird, die Zahl der Linien.

z. B. $23^{\circ} = 2300^{I} = 230000^{II} = 23000000^{III}$

und eben so ist es leicht zu bestimmmen, wie viele Ruthen, Schuhe und Zolle in einer gegebnen Zahl Linien enthalten seyn; man darf nur diese Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen eintheilen und jeder Klasse zwey Ziffern (die Nullen dazu gerechnet) geben, und oben her die Zeichen der Ruthen, Schuhe ꝛc. zu den Klassen hinsetzen.

z. B. Es sey gegeben eine Zahl von Linien 23456789^{III}, so mache die Eintheilung also $234^{\circ}\ 56^{I}\ 78^{II}\ 93^{III}$, und sprich: 234 Ruthen, 56 Schuhe, 78 Zolle und 93 Linien.

§. 487. Es ereignet sich zu Zeiten, daß man zwo Flächen miteinander vergleichen soll, derer Innhalt in ungleichartigem Maaße gegeben ist. In solchem Falle muß man sie zuvor gleichartig machen. Wenn der Unterschied nur in Schuhen und Zollen ꝛc. ist, so braucht es weiter nichts, als daß man die größere Maaße in kleinere gleichgiltige verwandele. z. B. Es kömmt die Frage vor: wie viel brauchen wir Goldblättchen von 6 Quadratzollen, eine Fläche von 23 Quadratschuhen damit zu belegen? da verwandele die 23 Quadratschuhe in Zolle, so kannst du alsdann das Product 2300 mit 6 dividieren, und den Quotient 383 mit dem Reste von 2 Quadratzollen erhalten.

§. 488.

§. 488. Den Innhalt eines Rectangels zu finden. L. F60

1. Messe die Grundlinie AB, und daran liegende Seite und Höhe AC.

2. Multiplicire AB mit AC: das Product giebt den Innhalt.

z. B. Es sey AB = 4‴, AC = 3‴, so ist der Innhalt = 12‴.

Der Beweiß ist wie der vorige § 484, nur ist hier AB nicht = AC.

§. 489. Die Raute und länglichte Raute L. in der aus dem Winkel C eine senkrechte Linie auf die Grundlinie *AB* fallen kann, ist gleich einem Rectangel v. gleicher Grundlinie und Höhe. F61

Man errichte aus den äußersten Puncten A u. B. und B der Grundlinie AB einer Raute, oder länglichten Raute, zwo auf die Grundlinie AB senkrechte Linien Bm und AM bis an die verlängerte Linie Cc nämlich Mc (es wird nothwendig m zwischen C und c fallen, wenn CD zwischen A und B fällt). Weil diese Figur ein Parallelogramm ist, (§ 422) so ist Cc und Mc parallel mit AB (§ 421), und also sind diese Perpendicl von gleicher Länge, und der Höhe der Raute oder länglichten Raute CD, welche gleichfalls auf AB senkrecht ist, gleich (§ 359), und miteinander parallel (§ 366); folglich ist der Winkel MAC = mbc (§ 364): es ist aber auch AC = Bc (§ 409); folglich △ MAC ≅ △ mBc (§ 340): man kann also das letztere auf das erste legen, und es wird mB auf MA, mc auf MC, Bc auf AC eintreffen (§ 260); und also wird aus der Raute oder länglichten Raute ACcB ein Rectangel AMmB von gleicher Höhe CD, und gleicher Grundlinie AB werden: also ist eine solche länglichte Raute einem solchen Rectangel gleich (§ 15).

§. 490.

Z. §. 490. Folglich ist ein jedes schiefwin-
F63 kelichtes Parallelogram einem Rectangel von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe gleich. Denn man kann sie, wenn sie also nebeneinander, daß ihre Grundlinien in Parallellinien fallen, gelegt werden, mit Parallellinien in lauter solche Parallelogramme von gleicher Höhe und Grundlinie zerschneiden, daß in den Schiefen die Perpendicularlinie aus einem der Grundlinie gegenüber stehenden Ecke, innerhalb selbe falle: folglich werden alle Stücke einander z. B. A = a, B = b; C = c; und also auch die ganze Parallelogramme einander gleich seyn (§ 16): folglich sind alle Parallelogramme, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, einander gleich.

Z. §. 491. Und weil sich jedes Parallelogramm in zwey ähnliche und gleiche Dreyecke durch eine Diagonallinie zerschneiden läßt (§ 423), so kann man jedes Dreyeck für ein halbes Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe, das durch eine Diagonallinie von einem ganzen abgeschnitten worden, halten: darum sind auch alle Dreyecke von gleicher Grundlinie und Höhe einander gleich (§ 51).

Z. §. 492. Man findt also den Innhalt eines jeden Parallelogramms, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicieret (§ 488); eines Dreyeckes aber, wenn man entweder die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die Höhe mit der halben Grundlinie multiplicieret, oder die Höhe mit der Grundlinie, und darnach das Product halbieret.

§. 493. Um die Höhe eines Dreyeckes zu erforschen
F62 muß man bisweilen die Grundlinie AB auf einer Seite verlängern, daß sie die Perpendicularlinie CD, welche seine

Höhe

Höhe ausdrücket erreichen kann. Ist die Höhe durch eine gerade Zahl ausgedrückt, so halbiere sie, und multipliciere die Grundlinie mit der halben Höhe; ist aber die Höhe eine ungerade, die Grundlinie eine gerade Zahl, so halbiere die Grundlinie, und mit der halben multipliciere die Höhe; sind beyde durch ungerade Zahlen gegeben, so multipliciere sie miteinander, und halbiere das Product, um den Innhalt des Dreyeckes zu bekommen.

z. B. Grundlinie 357°	Höhe 177°	Höhe 7°
Höhe 12	Grundlinie 8	Grundl. 3
halbe Höhe 6	½ Grundli. 4	Product 21
Innhalt des △ 2142	Innh. △ 708	Innh. △ 10½°

§. 494. Also wenn man die Grundlinie AC in gleiche Theile AI, I II, II C theilet, und aus der gegenüber stehenden Spitze B auf die Theilungspuncte gerade Linien BI, BII zieht, werden auch die Dreyecke ABI, IBII, IIBC einander gleich, und also das Dreyeck ABC in so viele gleiche Theile als die Grundline AC getheilet seyn. Z. F33

§. 495. Und wenn man in einem Parallelogramme die zwey einander gegenüber stehenden Seiten in gleiche Theile theilt, und je von jedem Theilungspuncte zum gegenüber stehenden eine Linie zieht, die mit den andern Seiten parallel seyn wird (§ 376); so wird das Parallelogram in so viel gleiche Theile A, B, C oder a, b, c getheilt, in so viel jede Seite ist getheilt worden. Z. F63

§. 496 Weil man eine jede geradliniigte Figur durch diagonallinien in lauter Dreyecke zerschneiden kann, so sehen wir jetzt auch, wie ihr Innhalt zu finden sey: man sucht nämlich zuerst eines jeden Dreyeckes Innhalt besonder, addiert sie alsdann Z. F64

dann alle in eine Summe, so hat man den Innhalt der ganzen Figur.

§. 497. Den Innhalt eines regulären
A. Polygons zu finden, wenn eine Seite, und die
F43 Zahl der Seiten gegeben sind.

A. 1. Weil ein jedes reguläres Polygon aus lauter ähnlichen und gleichen Dreyecken zusammen gesetzt ist (§ 430), so suche man die Höhe eines dieser Dreyecke ACB, man suche nämlich den Punct C (§ 443), und lasse aus C auf AB eine Perpendicularlinie Cm, welche die Höhe ist, fallen.

Wenn die Zahl der Seiten gerad ist, so giebt sich der Mittelpunct C leicht, man darf nur aus zweyen Ecken, zu den gerad gegenüber stehenden eine gerade Linie ziehen; wenn sie ungerad ist, ziehe man von zweyen Ecken diese Linien mitten auf die gerad gegenüber stehenden Seiten; in beyden Fällen wird im Durchschnitte dieser Linien C seyn.

2. Aus der Höhe und Grundlinie erforsche man alsdann den Innhalt des Dreyeckes ACB (§ 492); und diesen multipliciere man mit der Zahl der Seiten, so hat man des regulären Polygones Innhalt.

Oder suche man den ganzen Umfang (§ 463), und multipliciere diesen mit der halben Höhe mC, so hat man gleichfalls den Innhalt des Polygons.

B. Denn man bilde sich ein, alle die Dreyecke,
F65 in die das Polygon durch die auf die Ecken gehenden Stralen eines darum beschriebenen Zirkels getheilet wird, werden neben einander mit ihren Grundlinien oder Seiten des Polygons auf eine gerade

Li-

Linie mn hergesetzt, und Cm sey die Höhe dieser Dreyecke; so wird das $\triangle$ I = 1, $\triangle$ II = 2, $\triangle$ III = 3 &c. seyn. Also werden die Summen dieser Dreyecken 1 + 2 + 3 &c. = I + II + III &c. = $\triangle$ Cmn seyn, dessen Grundfläche mn dem Umfange des Polygons, und die Höhe Cm, der Höhe eines der kleinen Dreyecke, daraus das Polygon besteht, gleich ist: sein Innhalt aber wird mn × $\frac{1}{2}$ mC seyn, nämlich der ganze Umfang mit der halben Höhe eines bemeldter Dreyecke multipliciert.

§. 498. Also findt man den Innhalt eines Zirkels wenn man die Peripherie mit dem halben Strale, oder vierten Theile des Diameters multipliciert. 3.

Denn man betrachtet den Zirkel als ein reguläres Polygon, dessen Ecke in die Peripherie fallen, und dessen Seiten unendlich klein, und unendlich viel sind (§ 461); also als aus lauter kleinen, unendlich vielen Dreyecken zusammen gesetzt, derer jedes beyderseits einen Stral zur Seite, und eine unendlich kleine Senne zur Grundlinie hat; die Höhe aber eines jeden solchen Dreyeckes, die auf die Grundlinie senkrechte Linie nämlich ist von dem Strale unendlich wenig unterschieden (§ 461), und die Grundlinien, die kleinern Sennen nämlich fallen in die Peripherie selbst, also findt man 2c.

§. 499. Eines Sectors Innhalt, dessen Stral und der Bogen in Graden gegeben ist, findt man, wenn man aus dem Strale die Peripherie und Innhalt des ganzen Zirkels sucht; und diesen durch den Quotient dividieret, welcher entsteht, wenn man 360 mit der Zahl der Grade, die der Bogen des Sectors hat, dividieret. 3.

z. B. Der Bogen des Sextanten hat 60°; nun 360 : 60 ist = 6, also dividiere den ganzen Zirkel mit 6, so hast du des Sectors Innhalt.

Z. §. 500. Wenn man von dem Innhalte eines
ff66 Sectors CADB, das Dreyeck ACB, welches von der Sehne AB und zweenen Stralen AC und CB begränzet ist, abzieht, bleibt der Innhalt des Abschnittes ADB übrig. Der Innhalt aber des Dreyeckes ACB ist durch die Grundlinie AB, und Höhe Cm bestimmt (§ 492).

L. §. 501. Jedes Parallelogrammes Innhalt verhält sich zum Innhalte eines andern, wie die Producte aus ihren Grundlinien in ihre Höhen.

b. Denn nennen wir die Grundlinie von einem b und die Höhe A, so ist der Innhalt Ab (§ 492); es sey nun eines andern Parallelogramms Grundlinie = a und seine Höhe = B; so ist sein Innhalt aB: also verhalten sich diese Parallelogramme zu einander wie Ab zu aB, nämlich wie die Producte aus den Grundlinien in die Höhen.

Z. §. 502. Folglich, wenn die Grundlinien gleich sind, so verhalten sich die Parallelogramme zueinander wie ihre Höhen; und wenn ihre Höhen gleich sind, wie ihre Grundlinien, nämlich Ab : aB ist = b : B, wenn A = a ist; und Ab : aB ist = A : a, wenn b = B ist, (§ 180, 5).

Z. §. 503. Wenn die Parallelogramme einander gleich sind, wenn nämlich Ab = aB, so ist $A : a = B : b$ oder $A : a = \frac{1}{b} : \frac{1}{B}$, das ist. Ihre

re Höhen sind in verkehrter Verhältniß der Grundlinien.

§. 504. Es seyn zwey Parallelogramme einander ähnlich, und die Höhe von einem A, die Grundlinie B; des andern kleinern Höhe a, und Grundlinie b; so verhalten sie sich gegeneinander wie AB : ab, und, weil A : a = B : b ist (§ 484), so ist AB : ab = $A^2 : a^2 = B^2 : b^2$ (§ 181, 3) das ist ähnliche Parallelogramme verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate der respondierenden Seiten. Z.

§. 505. Da die Dreyecke halbe Parallelogramme sind, und die halben Größen sich zueinander verhalten, wie die ganzen (§ 183, 1), so läßt sich alles was wir jetzt §§ 501, 502, 503, 504 von den Parallelogrammen behauptet haben, auch auf die Dreyecke anwenden. Z.

§. 506. Und da alle geradlinigte Figuren aus lauter Dreyecken zusammen gesetzt sind, so müssen auch alle ähnliche geradlinichte Figuren sich zueinander wie die Quadrate ihrer Seiten verhalten (§ 181, 4). Z. §64

§. 507. Und da alle Linien, die man durch ein Polygon aus den einander respondierenden Theilen (z. B. den ähnlich liegenden Winkeln) auf die nämliche Art zieht, die nämliche Verhältniß zu den ähnlich liegenden Seiten haben müßen (denn sonst wären ja selbe Figuren einander nicht (247) ähnlich), so folget, daß ähnliche Figuren sich zu einander verhalten wie die Quadrate von was immer für ähnlich durch sie gehenden Linien, die nämlich durch ähnlich liegende Puncte Z.

gehen, folglich verhalten sich die Zirkel gegeneinander wie die Quadrate ihrer Durchmesser (§ 280).

L. §. 508. Der Innhalt eines Zirkels verhält sich zum Quadrate seines Diameters beynahe wie 785 : 1000.

B. Setzen wir die Seite eines Quadrates = dem Diameter eines Zirkels = 100 Theilchen, so ist des Quadrates Innhalt = 10000 (§ 484), und die Peripherie des Zirkels = 314 (§ 464), und der vierte Theil des Diameters = 25; folglich der Innhalt des Zirkels = 314 × 25 = 7850. (§ 468), also verhält sich das Quadrat des Diameters zum Zirkel wie 10000 : 7850 = 1000 : 785 (§ 783, 1).

§. 509. Diese Verhältniß ist nicht gar genau, weil auch die Verhältniß des Diameters zur Peripherie nicht genau ist. Ich habe für die Verhältniß des Quadrates des Diameters zur Zirkelfläche folgenden hypothetischen Logarithmus gefunden 9, 8950698813, welcher so genau ist, als man ihn mit dieser Zahl von Ziffern geben kann, und eine größere findt man auch in den größten Tabellen nicht.

Will man also den Innhalt eines Zirkels haben, dessen Durchmesser gegeben ist, so

1. Suche den Logarithmus des Durchmessers, und verdoppele ihn.

2. Addiere alsdann dazu diesen hypothetischen, so giebt die Summe den hypothetischen Logarithmus des Innhaltes des Zirkels; und wenn man 10 aus der Charakteristika wegwirft, hat man den Tabulärlogarithmus (§ 224).

1. B. Es sey der Logar. des Diameters der Erde 3, 2352439
verdoppelt 6, 4704878
Hypothetischer Verhältnißlogarithmus 9, 8950899

Hypothetischer Logar. des Innhalts 16, 3655777
Tabulärlogarithmus 6, 3655777

Dafür gehört 2320475 Quadratmeilen.

Damit wir auch aus der angehengten Tabelle ein Beyspiel haben, gebe man dem Durchmesser 7', und suche den Innhalt des Zirkels.

7 Logarithmus 0, 8451
Verdoppelt 1, 6902
Hypothetischer Verhältnißlogar. 9, 8951

Hypothet. Innhaltslogar. 11, 5853
Gemeiner 1, 5853

Dieser Logarithmus fällt zwischen die Logarithmen von 38, und 39, doch näher zum erstern: ist also der Innhalt nächstens 38' doch ein wenig größer.

§. 510. Wenn der Innhalt eines Zirkels gegeben ist, und man soll den Durchmesser suchen, so

1. Suche den hypothetischen Logarithmus des Innhalts.

2. Davon ziehe den Verhältnißlogarithmus ab.

3. Halbiere die Differenz, so hast du den Logarithmus des Duchmessers, z. B. man giebt den Innhalt eines Zirkels 38'.

Von 38 hypothetischer Logarithmus 11, 5798
Hypothetischer Verhältnißlogarithmus 9, 8951

Differenz 1, 6847
die halbe 0, 8423

Dieser letzte Logarithmus ist ein wenig größer als der Logarithmus von 7, also ist der gesuchte Durchmesser ein wenig kleiner als 7'.

§. 511.

L. §. 511. Wenn zwo Figuren einander ähnlich sind, so müssen sowohl die ganzen Figuren, als jede ihre ähnliche Theile den nämlichen Flächeninnhalt nach dem einer jeden proportionierten Maaße haben.

z. B. Wenn eines gleichseitigen Dreyeckes Seite 10' im großen Maaße lang ist, und eines andern eben so viele nach dem verjüngten Maaßstabe, so muß auch das große Dreyeck eben so viel Quadratschuhe im großen Maaße betragen, als das kleinere im verjüngten: und wenn ein von dem großen abgeschnittner Theil 4 Quadratschuhe im Großen ausmacht, muß ein ähnlicher Theil im kleinen auch 4 Quadratschuhe nach dem verjüngten Maaßstabe ausmachen.

B. Denn ähnliche Dinge können in nichts als etwa der Größe unterschieden seyn (§ 246); die Verhältniß aber einer Fläche gegen einer andern nach dem ihnen proportionierten Maaßstabe ist nicht ihre Größe selbst; noch bestimmt sie ihre Größe; also können sie darinnen nicht unterschieden seyn.

Ob mir schon bekannt ist, ein gewißes Dreyeck halte eben so viele Schuhe im großen natürlichen Maaße als ein anderes ihm ähnliches nach einem gegebnen verjüngten Maaßstabe, so weiß ich doch noch nicht, wie groß sie seyn. Eben so wenig weiß ich die Größe zweyer gleichschenkelichten Dreyecke, wenn man mir sagt, es sey eines jeden Innhalt 10 Quadratschuhe nach Maaßstäben, nach denen eines jeden Grundlinie 3 Schuhe hat.

§. 512. Dieser Lehrsatz ist der Grund der Ausmessungen ebner Fläche mit dem Meßtische: denn setzt man den Meßtisch horizontal zu erst ober einem Ende einer Grundlinie A, darnach ober dem andern C, und zielt von beyden aus auf alle Winkel der rechtlinichten Figur, so werden alle, wie wir es § 388 von dem Puncte B gezeigt haben, auf den Tisch gebracht, und erhält man darauf ein klei-

kleines Polygon, das den großen, dessen Größe man wissen will, ähnlich ist. Wenn wir dann einen verjüngten Maaßstab haben, nach dem ac so viel kleine Schuhe hat, als AC große auf dem Felde, so wird man auf dem Tische den Flächeninnhalt, sowohl der ganzen Figur, als jeglicher ihrer Theile nach dem kleinern Maaßstabe leicht erforschen können (§§. 493. und 496.). Nun so viel die kleine Figur auf dem Meßtische nach dem verjüngten Maaßstabe Quadratschuhe zu haben befunden wird, so viel muß auch die große auf dem Felde im großen oder natürlichen Maaße haben. Was aber dabey, man mag mit dem Meßtische, oder anders das Feld ausmessen, für Hindernisse und Beschwerden vorfallen, und wie sie zu heben, oder zu überwinden seyn, davon mag man in meiner Geodäsie nachsehen. F. 31

IX. Von den mathematischen Körpern.

§. 513. Wenn eine geradlinigte Figur, z. B. E. ein Quadrat AD an zwoen parallelen Leitungslinien CF, DG, die beständig durch die nämliche Puncte C, und D durchgehen, und immer gleich gegen die herabsteigende Fläche geneigt bleiben, sich beweget, so beschreibt diese Figur oder Fläche durch ihre Bewegung ein **Prisma**. Die Figur, durch deren Bewegung ein Körper beschrieben wird, heißt die **Zeugende**: das Prisma aber heißt ein **aufrechtes Prisma**, wenn die Leitungslinien auf die zeugende Figur senkrecht sind (F. 67.); machen sie aber damit einen schiefen Winkel, so heißt es ein **schiefliegendes Prisma** (F. 67.). F. 67 F. 68

§. 514. Wenn die zeugende Figur nur an einer Leitungslinie CF oder DF herabstiege, ob gleich diese mit einer nämlichen Fläche immer den nämlichen Winkel machte, könnte doch die zeugende Figur daran sich umdrehen, und so würde sie kein Prisma beschreiben. Es muß nämlich die zeugende Figur nicht nur der Fläche nach, sondern

auch nach ihren Gränzen immer in ihrer Bewegung sich selbst parallel bleiben, um ein Prisma zu beschreiben, und dieses geschieht nothwendig, wenn sie an zwoen parallelen Leitungslinien auf besagte Weise herabsteiget (man mag alsdann diese Leitungslinien zu äußerst an die Figur, daß sie selbe streifen, oder innerhalb derselben beständig durch die nämlichen Puncte durchgehen lassen) ohne daß der Winkel, den diese Linien mit der zeugenden Figur machen, geändert werde.

E. §. 515. Die oberste und unterste ebene Fläche des Prisma, das durch die Bewegung der zeugenden Figur entsteht, heißen die **Grundflächen des Prisma**: die Parallelogramme aber, die durch die Bewegung der geraden Linien, nämlich der Seiten der herabsteigenden Figur entstehn, heißen die **Seiten des Prisma.** Die **Höhe eines Prisma** ist die Perpendicularlinie, welche aus einem Puncte der obern Grundfläche auf die untere, oder auf eine ebene, darauf diese steht, herab geht: denn es kann wohl geschehen, wenn das Prisma schief ist, daß diese Linie über die untere Grundfläche hinaus falle.

Z. §. 516. Die Grundflächen also eines Prisma sind der zeugenden Figur ähnlich und gleich, und auch jeder mit den Grundflächen paralleler Durchschnitt ist selber ähnlich und gleich.

Z. §. 517. Prismen von einerley zeugenden Figur, und gleichen unter dem nämlichen Winkel auf selbe geneigten Leitungslinien, sind einander gleich und ähnlich (§. 278.). Wenn aber die zeugenden Figuren zweyer Prismen nur einander ähnlich, aber nicht gleich sind, und nicht auch die Leitungslinien zu den Seiten der zeugenden Figur die nämliche Verhältniß und nämliche Neigung haben, so sind selbe Prismen zwar einander ähnlich, aber nicht gleich (§. 279.).

§. 518. Ein Parallelepipedum ist ein Pris- E.
ma dessen zeugende Figur ein Parallelogramm ist. Ein quadratisches Prisma ist, dessen zeugende Figur ein Quadrat ist. Wenn es zugleich aufrecht ist, und die Leitungslinien den Seiten des zeugenden Quadrates gleich sind, entsteht daraus ein Kubus: hat dessen zeugendes Quadrat zur Seite eine Ruthe, so heißt solcher Kubus eine Kubicruthe; hat es zur Seite einen Schuh, so haben wir einen Kubicschuh, und ist die Seite ein Zoll, so haben wir einen Kubiczoll.

§. 519. Alle Kubusse sind einander ähnlich, z.
und jeder ist in 6 gleiche Quadrate eingeschlossen. In jedem Parallelepipedum aber überhaupt sind die einander gegenüberstehenden Seiten Parallelogramme.

§. 520. Den körperlichen Innhalt eines E.
gegebnen Körpers finden, heißt so viel, als finden, wie viel er Kubicruthen, Kubicschuhe, Kubiczolle ꝛc. groß ist.

§. 521. Den körperlichen Innhalt eines A.
Kubus finden. F.67

1. Messe eine Seite EF eines der Quadrate, a.
in die er eingeschlossen ist.

2. Multipliciere sie mit sich selbst, und das herauskommende Quadrat wieder damit, so hast du den Innhalt des Kubus.

z. B. Es sey EF 3 Linien lang, so ist jedes der 6 Quadraten 9 Quadratlinien, und der Kubus 27 Kubiclinien groß.

So viel nämlich z. B. Linien die Seite der B.
Grundfläche EF lang ist, so viel Kubiclinien kom

men an selbe in der ersten Reihe; so viel aber die Seite FG lang ist, so viel Reihen kommen nebeneinander zu liegen, um die Grundfläche zu decken: weil dann EF = FG ist, so bekomme ich die Zahl aller Kubiclinien, die in allen diesen Reihen die ganze Grundfläche bedecken, und also die unterste Schicht ausmachen, wenn ich die Zahl der in der äußersten Reihe stehenden, das ist, die Zahl der Linien, die EF lang ist, mit sich selbst multipliciere. Nun so viel Linien AE lang ist, so viel solche Schichten Kubiclinien liegen übereinander: und, weil AE = EF ist, so bekomme ich die Zahl der Kubiclinien in allen Schichten, wenn ich die Zahl der in der untersten mit der Zahl der Linien, die EF lang ist multipliciere, und dadurch erhalte ich die Zahl aller Kubiclinien, die der ganze Kubus in sich begreift.

3. §. 522. Es muß also die Kubicruthe 1000 Kubicschuhe, und der Kubicschuh 1000 Kubiczolle, der Kubiczoll 1000 Kubiclinien enthalten, wenn man zum Maaße der Seiten der Grundflächen der zehntheiligen Eintheilung sich bedienet.

§. 523. Es ist hier wieder das zehntheilige Längenmaaß viel bequemer als das zwölftheilige; weil auch die Kubicruthen leicht in Kubicschuhe ꝛc. verwandelt werden: denn soll man Kubicruthen in Kubicschuhe verwandeln, so setze man der Zahl der Ruthen drey Nullen bey, so ist es geschehen, setzt man noch drey dazu, so sind sie in Zolle verwandelt; und wenn wieder drey dazu kommen, so haben wir so viel Kubiclinien, als die gegebne Zahl Kubicruthen ausmacht.

z. B. $3^{v} = 3000^{i} = 3000000^{ii} = 3000000000^{iii}$.

§. 524. So ist es auch leicht, wenn der Innhalt eines Körpers in kleinern Theilen z. B. in Kubiklinien gegeben ist, zu bestimmen, wie viel selbe Zahl Kubiclinien Kubiczolle,

Kubic-

Kubicschuhe, und Kubicruthen ausmache; man darf sie nur von der Rechten zur Linken in Klassen, jede von 3 Ziffern theilen, und zu Ende jeder Klasse oben die Zeichen der Zolle, Schuhe ꝛc. hinsetzen. z. B. Es sey der Innhalt eines Körpers gefunden worden = 36456789352 Kubiclinien, so mache man die Eintheilung also: $36^{\circ}\,456'\,789''\,352'''$, und spreche: 36 Ruthen, 456 Schuhe, 789 Zolle, 352 Linien, alles Kubisch zu verstehen.

§. 525. Den Innhalt eines aufrechten A. Parallelepipedums zu finden, dessen Grundfläche ein Rectangel ist.

1. Man messe zwo Seiten der Grundfläche EF a. und FG, die miteinander einen rechten Winkel F.69 machen, und multipliciere die Zahl der Linien ꝛc. eine mit der andern, so findt man wie viel z. B. Kubiclinien auf der Grundfläche oder in der untersten Schicht seyn.

2. Man messe auch die Höhe AE: so viel nun diese z. B. Linien ausmacht, so viele Schichten Kubiclinien liegen aufeinander: also hat man nur das vorige Product noch mit der Zahl z. B. der Linien, die AE lang ist, zu multiplicieren, und das Product giebt den Innhalt dieses Parallelepipedums.

z. B. Es sey EF = 4 Linien: also kommen daran 4 Kubiclinien zu liegen, welche miteinander die erste Reihe ausmachen. Es sey FG 5 Linien lang, so kommen fünf solche Reihen, wie die erste war, nebeneinander in die unterste Schicht, die die unterste Grundfläche bedecken; und wir haben darinnen 4 X 5, das ist, 20 Kubiclinien. Es sey die Höhe AE = 3 Linien, so folget daß drey solche Schichten, wie die unterste war, übereinander liegen, also haben wir 3 X 20, das ist, 60 Kubiclinien in diesem Parallelepipedum.

Daß man auf diese Weise richtig verfährt, B. erhellet aus beygesetztem Beyspiele und dem Beweise des vorangehenden Satzes

§. 526.

L §. 526. Alle aufrechte Parallelepipeden, die gleiche Höhe und gleich große Grundflächen haben, sind einander gleich.

B Wenn die Grundflächen Rectangel sind, ist dieser Satz aus der erst im vorgehenden § angeführten Weise, ihren Innhalt zu finden, für sich selbst klar.

Gesetzt aber eines habe zur Grundfläche eine gleichseitige oder länglichte Raute, das andere aber ein Rectangel, doch daß die Grundlinien der Raute und des Rectangels und ihre Höhen gleich groß seyn, so sage ich, es seyen diese Parallelepipeden, und eben darum alle die eine gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, einander gleich.

Denn es seyn z. B. die länglichten Rauten
F.7° EACF und eacf, die zwo Grundflächen des Parallelepipedums Af, auf welchen die Leitungslinien Aa, fF senkrecht aufstehen; so schneiden wir mit einer ebenen Fläche FBbf, die auf die Grundflächen senkrecht sey, den dreyeckichten, prismatischen Theil FBCfbc weg, und versetzen ihn in EDAeda; so wird aus dem vorigen Parallelepipedum, das zu einer Grundfläche eine länglichte Raute EAFC hatte, ein anders, das ein Rectangel EDBF, zur Grundfläche hat: Nichts haben wir davon genommen, nichts dazu gesetzt; nur die Theile versetzt; und also die Größe nicht geändert: also ist dieses dem vorigen gleich. Wenn also aufrechte Parallelepipeden, welche Rectangel von gleicher Größe zu Grundflächen, und gleiche Höhen haben, einander gleich sind; müssen auch die ihnen gleich seyn, welche Rauten, oder länglichte Rauten zu Grundflächen haben, wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind.

§. 527.

§. 627. Die jetztgemeldte Versetzung des abgeschnittenen Prisma Bf in De muß man den Schülern wirklich zeigen. Aus der Figur können sich manche die Sache nicht recht vorstellen, denn die perspectivische Vorstellung ändert die Gestalten, und macht aus Rectangeln, als Bf, De, Ac und Ef sind, selbst länglichte Rauten. Wenn sie aber die Versetzung des dreyeckichten aufrechten Prisma Bf in De mit Augen sehen, fassen sie den Beweis leicht.

§. 528. Ein einfachschiefes Parallelepipedum nenne ich, dessen vier Seiten aber nicht mehrere; ein doppeltschiefes aber, dessen alle Seiten Rauten oder länglichte Rauten sind. E.

§. 529. Die einfachschiefen, und doppeltschiefen Parallelepipeden, sind den aufrechten von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche gleich. L.

Es sey AG ein einfachschiefes Parallelepipedum, dessen nur die Seiten AD und EG Rectangel seyn, BG aber und AF seyn die Grunflächen; so wird man, wenn man das schiefe Prisma mG mit der auf BG senkrechten Fläche mnGF wegschneidet, und so übersetzt, daß die Fläche FCDG an EABe hinkömmt, aus dem einfachschiefen ein aufrechtes Parallelepipedum machen, das beyderseits die Rauten oder länglichte Rauten mG zu Grundflächen hat. B. F. 71

Ist das Prisma doppeltschief, so wird durch die Uebersetzung des Prisma mG ein einfachschiefes daraus.

Also kann ohne Aenderung der Größe nur mit Versetzung der Theile aus den doppeltschiefen ein einfachschiefes, und aus diesem ein aufrechtes gemacht werden, das mit ihm eine gleiche Höhe und gleiche Grundflächen hat (denn man kann jede

Seite

Seite zur Grundfläche annehmen, und bey der Uebersetzung des Theiles mcF wird zwar die Gestalt, aber nicht die Größe des Parallelogramms AF geändert): folglich sind die schiefen Parallelepipeden den aufrechten von gleicher Grundfläche und Höhe gleich.

§. 530. Da ist es fast unumgänglich nothwendig, daß man den Schülern diese Versetzung der abgeschnittenen Theile für die Augen lege, weil sie sich selbe aus der Figur viel zu schwer werden vorstellen können.

§. 531. Es sind also alle Parallelepipeden die schiefen sowohl (§. 529.), als die aufrechten (§. 526. und §. 529.), wenn sie gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen haben, einander gleich.

Z. §. 532. Folglich findt man eines jeden Parallelepipedums körperlichen Innhalt, wenn man die Grundfläche mit der Höche multiplicieret (§. 525.).

Z. §. 533. Also sind auch alle dreyeckichte Prismen, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben, einander gleich; und findt man ihren körperlichen Innhalt, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multipliciert. Denn wenn man ein Parallelepipedum durch eine Diago-
F.72 nalfläche EDCF zerschneidet, werden zwey ähnliche und gleiche dreyeckichte Prismen EaDCbF und EADCFB daraus, die einerley Höhe, und die halbe Grundfläche mit dem Parallelepipedum gemein haben.

Z. §. 534. Und weil man jede andere Prismen, von was immer für einer Gestalt die zeugende Figur seyn mag, mit ebnen Diagonalflächen, die

man

man durch die Ecke der Grundflächen gehen läßt, in lauter dreyeckichte zerschneiden kann, so müssen auch alle Prismen, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, einander gleich seyn, und ihr Innhalt gefunden werden, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplicieret.

§. 535. Und da der Zirkel für ein reguläres Z. Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten kann gehalten werden (§. 461.), so kann auch der Cylinder (welcher entsteht, wenn ein Zirkel an einer durch seinen Mittelpunct gehenden Leitungslinie beständig mit sich selbst parallel herunter steiget) als ein Prisma, das aus lauter kleinen circulären unendlich dünnen Blättchen zusammengesetzt ist, betrachtet werden; folglich auch die Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich. Es wird aber auch, wenn ein Rectangel sich um eine seiner Seite als eine Achse bewegt, ein Cylinder und zwar ein aufrechter beschrieben.

§. 536. Es verhalten sich also die Pris- Z. men und Cylinder gegeneinander, wie die Producte aus ihrer Grundfläche in die Höhe.

§. 537. Und Prismen, welche ähnliche Z. Grundflächen haben, verhalten sich zueinander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten multipliciert durch die Höhe (§. 506.), die Cylinder aber wie die Quadrate der Durchmesser der zeugenden Zirkel multipliciert mit der Höhe.

§. 538. Die Prismen und Cylinder, welche Z. gleiche Grundflächen haben, verhalten sich zueinander, wie ihre Höhen. Und die gleich hohen verhalten sich zueinander wie ihre Grundflächen; sind bey diesen die Grundflächen zu-

gleich

gleich auch ähnlich, so verhalten sich solche Prismen und Cylinder gegeneinander wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten der Grundflächen oder der Durchmesser.

B. §. 539. Wenn zweene Cylinder oder zwey Prismen, oder ein Prisma und Cylinder einander gleich sind, so verhalten sie sich gegeneinander verkehrt wie ihre Grundflächen zu den Höhen. Denn nennen wir die Grundfläche des einen b, und seine Höhe A, des andern Grundfläche B und seine Höhe a; so wird bA = Ba folglich b : B = a : A (§. 178.) = $\frac{1}{A} : \frac{1}{a}$ seyn (§. 180. 10.).

L. §. 540. Aehnliche Prismen, und ähnliche Cylinder verhalten sich gegeneinander wie die Kubusse jeder in ihnen gleichliegenden Linie, als da sind, die gleichliegenden Seiten der Grundflächen, die gleichliegenden Diagonallinien, die Diameter der Grundflächen bey den Cylindern.

B. Denn wenn diese Körper ähnlich sind, haben sie ähnliche Grundflächen (§. 246.), und diese verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten, oder Durchmesser und andern ähnlich darinn liegenden Linien (§. 506. und §. 507); die Höhe aber ist bey diesen ähnlichen Körpern auch den ähnlich liegenden Seiten der Grundflächen, und andern ähnlich darinn liegenden Linien proportional (denn sonst wären sie dadurch voneinander unterschieden); folglich ist das Product aus der Grundfläche in die Höhe bey diesen Körpern, wie der Kubus einer jeden solchen Linie (§. 181.); nun verhalten sich diese Körper selbst

gegen-

gegeneinander, wie diese Producte (§. 536.), also wie die Kubusse dieser Linien.

z. B. Es seyn zwey Parallelepipeden einander ähnlich; eine Seite der Grundfläche des kleinern sey = 2, die andere = 3, die Höhe = 4; bey dem größern sey eine Seite der Grundfläche = 4, die andere = 6, die Höhe = 8; so wird der Innhalt des ersten = 24, des andern = 192 seyn. Die ähnlich liegenden Linien darinnen sind 2 und 4, 3 und 6, 4 und 8, die sich jede zueinander verhalten wie 1 : 2, so müssen auch diese Körper gegeneinander wie die Kubusse dieser Zahlen, nämlich wie 1 und 8 (§. 181. 4.) gegeneinander sich verhalten.

§. 541. Es sey gegeben die Höhe eines Cylinders q und sein Durchmesser $= b$; und eines andern Cylinders, der dem ersten an Größe gleich ist, seine Höhe $= c$, man soll seinen Durchmesser $= x$ finden. A.

Weil $a \times b^2 = c \times x^2$ (§. 539.), so sprich: a. $c : a = b^2 : x^2$, nachdem x^2 ist gefundeu worden, zieh die Quadratwurzel daraus, so ist diese $= x$ (§. 121.).

§. 542. Eine Visierruthe verfertigen, mit der man leicht erforschen kann, wie viel Maaß flüßiger Materie ein cylindrisches Gefäß faßt. A.

1. Gießt in ein cylindrisches Geschirr eine Maaß Wasser, und messet den innern Durchmesser dieses Geschirres und die Höhe des Wassers in selbem, daraus berechnet alsdann den Durchmesser eines ganz niedern Cylinders, der z. B. nur einen Zoll hoch, und eben so groß sey, als der gegebene Wassercylinder, daß er auch eine Maaß fasse (§. 541.); und diesen berechneten Durchmesser übersetzet a.

auf

F. auf eine Seite der Ruthe MN, (die wir die Seite
100 der Durchmesser nennen wollen) von M gegen N.
Er sey nämlich M 1.

2. Den gefundenen Durchmesser theile man in 1000 kleine Theile (man mag sich dazu eine geometrische Scale bereiten, darauf AB (F. 35.) der zehende Theil dieses gefundenen Durchmessers ist) und man bestimme durch Rechnung (§. 222.) in solchen kleinen Theilen den Durchmesser eines eben so hohen Cylinders, der zwo Maaß fasset, nämlich $\sqrt{2000000} = 1414$ (§. 538.); darnach suche man eben so den Diameter für 3 Maaß $= \sqrt{3000000} = 1732$; darnach für 4 Maaß; für 5 Maaß ꝛc. und so kann man eine ganze Tabelle machen; oder vielmehr, weil sie schon gemacht ist, wie wir sie hersetzen, sich derselben bedienen.

M	Durchmesser.	M	Durchmesser.	M	Durchmesser.	M	Durchmesser.	M	Durchmesser.
1	1000	11	3316	21	4582	31	5567	41	6403
2	1414	12	3464	22	4690	32	5657	42	6480
3	1732	13	3605	23	4790	33	5744	43	6557
4	2000	14	3741	24	4898	34	5831	44	6633
5	2236	15	3873	25	5000	35	5916	45	6708
6	2449	16	4000	26	5099	36	6000	46	6782
7	2645	17	4123	27	5196	37	6082	47	6855
8	2828	18	4242	28	5291	38	6164	48	6928
9	3000	19	4359	29	5385	39	6244	49	7000
10	3162	20	4472	30	5477	40	6324	40	7071

F. 3. Nun nach dieser Tabelle mache man auf
100 der Seite der Durchmesser M2 = 1414 solcher Theilchen, M3 = 1732 ꝛc. und schreibe dazu die Zahlen der Maaße 2, 3 ꝛc.

4. Auf einer andern Seite der Ruthe (die wir wollen die Seite der Höhen nennen) setze man die

Höhe

Höhe des Cylinders z. B. 1 Zoll, für eine Maaß so viel mal hin, als man kann, und schreibe Ziffern 1, 2, 3 ꝛc. dazu, so ist die Visierruthe fertig.

§. 543. Die Fähigkeit eines cylindrischen A. Geschirres mit der Visierruthe zu erforschen.

1. Messe die innere Höhe des Geschirres mit der a. Seite der Höhen auf deiner Visierruthe, und merke sie.

2. Messe den innern Durchmesser mit der Seite der Durchmesser, und merke die Zahl, welche seine Länge auf dieser Seite abschneidet.

3. Die zwo bemerkten Ziffern multipliciere miteinander, so giebt das Product die gesuchte Fähigkeit des Cylinders.

z. B. Gesetzt, die Höhe eines Cylinders sey = 122, der Durchmesser = 5; so ist die Fähigkeit = 610 Maaß.

§. 544. Mit der Visierruthe die Fähigkeit A. eines Faßes zu erforschen.

1. Messe mit der Seite der Höhen die innere Hö- a. he des Faßes, nämlich von einem Boden zum andern. Man kann zwar anstatt der innern die äußere Höhe messen, aber alsdann muß man die Bodendicke, und was darüber hinaus steht, davon abziehen.

2. Messe auch den innern Durchmesser, sowohl den größten beym Spuntloche, als den kleinsten bey einem Boden, und suche die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen beyden (§. 168.), die man den äquierten Durchmesser heißt, und seine Länge erforsche mit der Durchmesserseite der Visierruthe.

3. Die

3. Die mit dieser Seite gefundene Zahl multipliciere mit der Zahl, die mit der Höhenseite ist gefunden worden, so giebt das Product die Fähigkeit des Faßes.

Denn man weis aus der Erfahrung, daß zwar nicht mit geometrischer Genauigkeit, doch beynahe ein Faß so viel faße als ein Cylinder von gleicher Höhe, und einem Durchmesser, der dem äquierten des Faßes gleich ist.

§. 545. Will man auch die Oberfläche der Prismen und Cylinder erforschen, so suche man zuerst den Flächeninnhalt der Grundfläche (§§. 498. 499.), den verdopple man, um den Innhalt beyder miteinander zu haben: nun muß man noch die Oberflächen der Seiten beysetzen, wenn man die ganze Oberfläche dieser Körper haben will. Wenn die gegebnen Prismen und Cylinder aufrecht sind, so suche man den Umfang der Grundfläche mit Addierung aller Seiten in eine Summe, oder die Peripherie (§. 465.) und multipliciere sie mit der Höhe, so giebt das Product die Oberfläche aller Seiten miteinander. Wenn aber ein schief liegendes Prisma gegeben wird, so muß man jeder Seite Oberfläche besonders suchen (§. 620.), ausgenommen, daß bey den Parallelepipeden die entgegengesetzten Seiten einander gleich sind, und also zwo und zwo miteinander gefunden werden. Die Oberfläche eines schiefstehenden Cylinders ist viel schwerer zu erforschen, darum wollen wir uns damit nicht aufhalten.

E. §. 546. Man setze, eine gerade Linie von unbestimmter Länge bewege sich an einem unbeweglichen Punct C um die Seiten einer geradlinigten F.73 Figur z. B. eines Quadrates ABDE herum, so wird diese gerade Linie so viele Dreyecke beschreiben, als die Grundfläche Seiten hat, z. B. 4 nämlich ABC, BCD, DCE und ECA. Der Körper der zwischen diesen Dreyecken und der Grundfläche enthalten ist, heißt eine Pyramide. Es ist nämlich die Pyramide ein Körper, der von einer Grundfläch:

che und so vielen Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat, die alle in einen Winkel C zusammen kommen, begränzet wird.

§. 547. Die Achse einer Pyramide ist eine E. gerade Linie Cm, die aus der obersten Spitze C mitten auf die Grundfläche gezogen wird; wenn nun diese auf die Grundfläche senkrecht ist, heißt die Pyramide eine aufrechte, sonst aber eine schiefe. Eine aufrechte heißt man regulär, wenn ihre Grundfläche ein reguläres Vieleck ist.

§. 548. Eine reguläre Pyramide, deren Grund- E. fläche ein reguläres Vieleck mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, nämlich der Zirkel ist, heißt F. 74 ein Kegel (conus). Es entsteht nämlich der Kegel, wenn eine gerade Linie CA, die von einem Puncte ober dem Zirkel ADB ausgeht, sich um selben bewegt, und er ist ein Körper, der in die Oberfläche, welche bemeldte gerade Linie beschreibt, und dem Zirkel als einer Grundfläche eingeschlossen ist.

§. 549. Ein aufrechter Kegel ist, dessen Achse E. mit der Grundfläche einen rechten Winkel macht, er entsteht auch, wenn ein rechtwinklichtes Dreyeck CmA sich um eine Seite als seine Achse Cm bewegt.

§. 550. Also ist jeder mit der Grundfläche pa- Z. rallele Durchschnitt des Kegels ein Zirkel, dessen Stral an zum Strale der Grundfläche Am sich verhält wie Ca = CA oder wie Cn : Cm (§. 400.): das ist, die Stralen der Zirkel, welche durch die mit der Grundfläche parallele Durchschnitte entstehen, nehmen ab und zu, wie ihre Entfernungen von dem Scheitel des Kegels C.

§. 551.

Z. §. 551. Und weil die Zirkel sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten (§. 507.), so nehmen diese Zirkel ab und zu, wie die Quadrate ihrer Entfernung von dem Scheitel des Kegels C.

L. §. 552. Ein mit der Grundfläche einer
F.75 dreyeckichten Pyramide *ABD* paralleler Durchschnitt *abd*, ist der Grundfläche ähnlich; 2. und sie verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Scheitel *C*, nämlich wie das Quadrat von *Cm* zum Quadrate von *Cn*.

B. Weil dieser Durchschnitt, mit der Grundfläche parallel zu seyn, gesetzt wird, so ist ad parallel mit AD, ab mit AB, bd mit BD, und am mit am; folglich ist (§. 400. und 384.)

I.	II.
CA : Ca = AB : ab	CB : Cb = AB : ab
CA : Ca = AD : ad	CB : Cb = BD : bd
folglich AB : ab = AD : ad	folglich AB : ab = BD : bd
oder AB : ab = AD : ad = BD : bd	
also 1. △ABD ∽ △abd (§. 384)	
folglich △ABD : △abd = Quadr. AB : Quadr. ab (§. 505.)	

III.

In dem △CAm und △Can ist CA : Ca = Cm : Cn
CA : Ca = AB : ab
also Cm : Cn = AC : ab
(§. 180.) Quad. Cm : Quad. Cn = Quad. AB : Quad. ab
(II.) △ABD : △abd = Quad. AB : Quad. ab
folglich 2. ist △ABD : △abd = Quad. Cm : Quad. Cn

§. 553.

§. 553. Eine jede Pyramide, die nicht drey- 3.
eckicht ist, läßet sich durch Diagonalflächen, die durch die Scheitel und die Ecke der Pyramide geht, in so viele dreyeckichte Pyramiden zerschneiden, als in viele Dreyecke die Grundfläche dadurch zerschnitten wird: also ist auch in jeder anderer F73
Pyramide die nämlich mehr Ecke hat, und also auch im Kegel als einer Art von Pyramiden, jeder mit der Grundfläche parallele Durchschnitt *abde* der Grundfläche *ABDE* ähnlich, und sie verhalten sich gegeneinander wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Scheitel (§ 181. 3): folglich, wenn zwo Pyramiden einerley Grundfläche und die nämliche Höhe haben, sind auch jede mit der Grundfläche parallele Durchschnitte, in gleicher Entfernung von der Grundfläche, einerley.

§. 554. Es gehe eine Verticale, oder auf 4.
die Grundfläche senkrechte Fläche *ADC* durch F76
die Scheitel einer Pyramide, und man ziehe auf dieser Fläche zwo Linien, eine *N*? senkrecht auf die Grundfläche parallel mit *CD*, die andere *PM* parallel mit der Grundfläche oder mit *DA*; so ist *NP* : *PM* = *CD* : *DA*. Denn der Winkel N ist = C, und der Winkel M 5.
= A (§ 364); und also △ CDA ∽ △ NPM (§ 381), folglich NP : PM = CD : DA (§ 384).

§. 555. Da dann CD : DA in jeder Pyra- 6.
mide eine bestimmte Verhältniß hat, so muß, wenn *NP* ein Unendlichtheilchen ist, auch *PM* ein Unendlichtheilchen der nämlichen Ordnung seyn, und in Vergleich einer endlichen Linie *eN* oder *EP* verschwinden (§ 233).

L. §. 556. Zween horizontale mit der Grundfläche parallele Durchschnitte einer Pyramide oder eines Regels, die einander unendlich nahe sind, sind einander gleich.

B. Denn setzen wir CDA sey ein verticaler Durchschnitt der Pyramide durch die Scheitel C, und CD sey auf die Grundfläche senkrecht, in- oder außer der Pyramide, wenn sie gar zu schief ist; darinnen sey N was immer für ein Punct in dem obern und M in dem untern horizontalen Durchschnitte, und also liege die ganze Linie eN in dem obern und EM in dem untern Durchschnitte, die einander unendlich nahe seyn; so ist NP = eE (in Vergleich mit der Höhe der Pyramide CD, und einer jeden endlichen Linie, als eN) unendlich klein, und folglich EM (die Entfernung des Punctes M von der Linie CD) = eN (der Entfernung des Punctes N von eben dieser Linie), weil PM völlig verschwindet (§ 555): also jeder Punct M an der Gränze des untern Durchschnittes ist eben so weit von der Linie CD entfernet, als der ober ihm stehende N in dem obern Durchschnitte davon entfernet ist: also haben beyde gleiche Gränzen, und sind einander gleich.

B. §. 557. Also, wenn man aus einer Pyramide mit zweyen mit der Grundfläche parallelen und einander unendlich nahen Durchschnitten nnn und mmm ein unendlich dünnes Blättlein herausschneidet, kann man selbes für ein prismatisches Blättlein gelten lassen, dessen Grundfläche mmm = nnn, und die Höhe unendlich klein sey.

B. §. 558. Folglich, wenn man durch zwo Pyramiden ABC und abc, die zwar einerley Höhe, und einerley Grundflächen haben, derer aber die

eine

eine ABC aufrecht, die andere abc schief sey, zweene F77
mit der Grundfläche einander unendlich nahe Durchschnitte NNnn und MMmm macht, so sind die unendlich dünne Blättlein MMNN, und nnmm, welche zwischen diesen Durchschnitten liegen, einander gleich. Denn es ist NN = nn und MM = mm, weil sie von C und c gleichweit entfern t sind, und also zu AB = ab die nämliche Verhaltniß haben (§ 552).

§. 559. Wenn man nun sich vorstellt, die 3.
zwo gleichen Höhen der Pyramiden ABC und abc nämlich CD und cd werden in unendlich viele und unendlich kleine gleiche Theile getheilt, und man mache durch alle Theilungspuncte der Linien CD und cd mit den Grundflächen AB und ab parallele Durchschnitte, dadurch eine Pyramide in eben so viele unendlich dünne Blättlein als die andere zerschnitten werde, so müssen alle Blättlein in einer Pyramide, allen in der andern, weil jedes den zwischen den nämlichen Durchschnitten liegenden gleich ist, und also die ganze Pyramide *ABC* der ganzen *abc* gleich seyn.

§. 560. Wenn also zwo Pyramiden einer- 3.
ley Grundfläche und die nämliche Höhe haben, so verschieden auch immer die Neigung ihrer Achsen seyn mag, sind sie doch einander gleich. Denn sie sind jede einer aufrechten von eben solcher Grundfläche und Höhe gleich.

§. 561. Ja auch wenn zwo Pyramiden 3.
unähnliche doch gleiche Grundflächen, und gleiche Höhen haben, sind sie nichts desto weniger einander gleich. Denn da in beyden jede von der Scheitel gleich weit abstehende Durch-

schnitte zur Grundfläche die nämliche Verhältniß haben (§ 553), und also einander gleich sind, wenn die Grundflächen gleich sind; so müssen jede Blättlein in einer Pyramide denen in der andern zwischen den nämlichen mit der Grundfläche gelegnen parallelen Durchschnitten, und also auch die ganzen Pyramiden einander gleich seyn.

B. §. 262. Und da die Kegel eine Art von Pyramiden sind, so gilt auch alles von ihnen, was wir von den Pyramiden in den Zusätzen bis § 562 aus dem vorangehenden Lehrsatze geschlossen haben, es sind also alle Kegel die gleich große Durchmesser ihrer Grundflächen und gleiche Höhe haben einander gleich, denn wenn bey ihnen die Durchmesser der Grundflächen gleich sind, so sind auch eben darum die Grundflächen selbst gleich (§ 280).

L. §. 563. Jedes dreyeckichtes Prisma, das nämlich ein Dreyeck zur Grundfläche hat, läßt sich in 3 gleiche Pyramiden zerschneiden.

Denn man mache einen Durchschnitt von D
B. auf BC zu, so wird dadurch das Prisma in zweene
F78 Theile zerschnitten; einer derselben ist die Pyramide ADBC, der andere ist der Körper DEFCB: und dieser wird, wenn man von C aus einen Durchschnitt auf DE zu macht, in zwo Pyramiden ECFD und ECBD von gleichen Grundflächen ECB und ECF (§ 423) und gleichen Höhen, weil sie mit den Scheiteln in D zusammenstossen, die also ohne Zweifel einander gleich sind (§ 562), zerschnitten. Es ist aber die Pyramide ECBD auch der Pyramide ABDC gleich, weil beyde mit ihren Scheiteln in C

zusammen stossen, und gleiche Grundflächen ABD und EDB haben (§ 423 und § 561): also sind alle diese drey Pyramiden einander gleich (§ 43).

§. 564. Man kann also jede dreyeckichte Py- 3.
ramide als eine aus einem dreyeckichten Prisma von der nämlichen Grundfläche ABC und der nämlichen Höhe AD herausgeschnittene ansehen; und also ist jede der dritte Theil eines solchen Prisma, das ist, der dritte Theil der Grundfläche multiplicieret mit der Höhe (§ 534).

§. 565. Und weil man alle andere Pyrami- 3.
den in lauter dreyeckichte zerschneiden kann (wenn man nämlich die Grundfläche mit Diagonalen in Dreyecke zerschneidet, und flache Durchschnitte von der Scheitel durch diese Diagonale macht), die alle einerley Höhe haben, und also jede der dritte Theil des Products aus seiner Grundfläche in diese Höhe ist; so sind auch alle zusammen, das ist, die ganze Pyramide der dritte Theil des Products der ganzen Grundfläche in die Höhe.

§. 566. Folglich ist der Kegel der dritte 3.
Theil eines Cylinders von gleiche Höhe und gleichem Durchmesser; denn der Kegel kann als eine Art von Pyramiden (§ 548), der Cylinder als eine Art von einem Prisma (§ 535) angesehen werden.

§. 567. Die Kegel und Pyramiden also von 3.
gleicher Höhe verhalten sich gegeneinander wie ihre Grundflächen, und, wenn diese ähnlich sind, wie die Quadrate der Durchmesser, oder der gleichliegenden Seiten (§ 506). Und wenn die Grundflä-

chen gleich sind verhalten diese Körper sich gegeneinander wie ihre Höhen.

§. 568. Wir wollen uns mit Ausmessung der Oberflächen der Pyramiden und Kegel nicht aufhalten. Man sieht aber wohl, daß jede Pyramide so viele dreyeckichte Seitenflächen habe, als Seitenlinien an der Grundfläche sind, derer jeder Innhalt besonders kann gefunden werden (§ 492). Des aufrechten Kegels Oberfläche, ohne die Grundfläche, findt man, wenn man die Peripherie der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels nämlich mit dem halben Theile der geradenLinie von der Scheitel an die Peripherie der Grundfläche multiplicieret. Eines schiefen Kegels Oberfläche ist viel schwerer zu suchen, aber auch für uns nicht nöthig.

E. §. 569. Wenn ein halber Zirkel ACBD sich F79 um den Durchmesser AB herum dreht, beschreibt er eine Kugel; und die halbe Peripherie ADB beschreibt die Oberfläche der Kugel.

B. §. 570. Folglich müssen auf der Oberfläche der Kugel alle Puncte von dem Mittelpuncte C gleichweit entfernet seyn.

E. §. 571. Es ist also die Kugel ein Körper, der in eine Oberfläche eingeschlossen ist, darauf alle Puncte von einem in selbem, dem Mittelpuncte nämlich, gleichweit entfernet sind.

E. §. 572. Ein Abschnitt einer Kugel (Segmentum Sphæræ) ist ein Theil derselben, den man mit einem ebenen Durchschnitt abschneidet. Ein spärischer Ausschnitt (Sector Sphæricus) aber ist ein Theil einer Kugel, welcher entsteht, wenn ein Ausschnitt eines Zirkels CAd sich um den Stral AC als eine Achse bewegt.

§. 573. Da auf diese Art der spärische Aus- F80
schnitt erzeuget wird, beschreibt das Dreyecke CED
einen Kegel, und der halbe Abschnitt des Zirkels
BED beschreibt einen Abschnitt der Kugel: also
besteht der spärische Ausschnitt, aus diesem
spärischen Abschnitte, und dem bemeldten Ke-
gel als seinen Theilen.

§. 574. Wenn man eine Kugel mit einer eb- L.
nen Fläche durchschneidet, so ist der Durchschnitt F79
ein Zirkel, den der Sinus Ed beschreibet; und je
größer dieser Sinus ist, je größer wird dieser Zirkel;
also, da der Radius der größte Sinus ist, (§ 452)
muß der größte Durchschnitt durch den Mittelpunct
gehen: der größte Zirkel also ist der, welcher
durch den Mittelpunct der Kugel geht, und
sie in zwey gleiche, und ähnliche Theile zer-
schneidet (§ 278), denn beyde Theile entstehen
durch Bewegung eines Quadranten um eine seine
Seite, die ein Stral ist.

§. 575. Weil alle Puncte auf der Oberfläche S.
der Kugel gleichweit von dem Mittelpuncte entfer-
net sind, so müssen alle Stralen, und also auch
alle Durchmesser der Kugel gleich groß seyn.

§. 576. Eine halbe Kugel ist = zwey L.
Drittel von einem Cylinder der den größten
Zirkel der Kugel zur Grundfläche, und den
Stral zur Höhe hat.

Es drehe sich ein Quadrant ACB um den B.
Stral AC als eine Achse; so wird dieser in seiner F81
Bewegung eine Halbkugel, der Stral CB aber den
größten Zirkel als die Grundfläche der Halbkugel
beschreiben, CA aber ihre Höhe seyn. Es drehe

sich

sich nun auch ein Quadrat ACBD um seine Seite AC, die der Stral der Kugel ist, so beschreibt dieses einen Cylinder von gleicher Höhe mit der Halbkugel, und gleicher Grundfläche, die der Stral BC beschreibet. Es drehe sich drittens um die Seite AC als eine Achse ein gleichseitiges rechtwinkelichtes Dreyeck ACD, so entsteht daraus ein umgekehrter Kegel, dessen Grundfläche von der Linie AD = AC = CB beschreiben wird, der also dem grösten Zirkel, den BC beschrieben hat, gleich ist, und die Höhe dieses Kegels ist AC, also haben alle diese 3 Körper gleich groſse Grundflächen, und gleiche Höhen.

Nun ziehe man aus einem beliebigem Puncte E der Linie AC eine Linie EH mit CB parallel: man bilde sich aber die Linie EH als doppelt ein, als wären es zwo parallele Linien oder Seiten eines Parallelogramms, die aber einander unendlich nahe seyn, daß also die Höhe dieses Parallelogramms gegen seiner Breite unendlich klein sey: diese doppelte Linie EH, oder vielmehr dieses Parallelogramm wird in seiner Bewegung (die wir setzen, daß sie mit den Grundflächen dieser 3 Körper parallel geschehe) ein unendlich dünnes cylindrisches Blättlein beschreiben, als einen Theil des Cylinders, denn das Quadrat ACBD beschrieben hat. Ein Theil dieser Linie oder dieses Parallelogramms EF wird ein unendlich dünnes rundes Blättlein im Kegel, dessen zeugende Figur ACD war; und endlich die Linie oder das Parallelogram EG ein unendlich dünnes rundes Blättlein in der Halbkugel beschreiben: alle diese drey Blättlein, sind kleine Cylinderchen, von der nämlichen unendlich kleinen Höhe (§ 535); die sich also zueinander, wie die Quadrate der Durchmesser, oder der halben

Durch-

Durchmesser ihrer circulären Grundflächen verhalten nämlich wie die Quadrate von EH, von EF, und von EG (§ 538); oder, weil EH = CB (§ 414) = CG (§ 271), und EF = CE (denn es ist EF: EC = DA: AC (§ 400), und weil AD = AC, auch EF = EC), wie die Quadrate der Linien GC, EC, und EG.

Nun ist $CG^2 = CE^2 + EG^2$ (§ 394) also ist das runde Blättlein des Cylinders, dessen Stral EH ist, zweyen runden Blättlein nämlich dem Blättlein im Konus vom Strale EF, und dem Blättlein der Kugel vom Strale EG zusammen gleich.

Dieses nun gilt von den 3 unendlich dünnen und gleich hohen Blättlein dieser Körper, wo man immer sie mit der Grundfläche parallel durchschneidet, es mag der Schnitt weiter oben oder weiter unten geschehen: also ist die Summe aller unendlich vieler Blättlein aus denen der Cylinder besteht, gleich der Summe aller eben so vieler Blättlein aus denen der Kegel besteht und aller eben so vieler Blättlein, aus denen die Halbkugel besteht; das ist der ganze Cylinder ist dem ganzen Kegel, und der ganzen Halbkugel miteinander gleich.

Da wir nun schon vorhin wissen, daß der Kegel ein Drittel des Cylinders sey, der gleiche Grundfläche und Höhe hat (§ 566), so muß die Kugel 2 Drittel davon ausmachen: denn es heiße der Cylinder C, die Halbkugel S, der Kegel K.

Weil

Weil $C = \frac{3}{3} C = S + K = S + \frac{1}{3} C$ (§ 566)

so ist $\frac{2}{3} C = S$

B. §. 577. Also zwey Halbkugeln oder eine ganze macht $\frac{2}{3}$ solcher Cylinder, oder ein Drittel eines noch so hohen (§ 567), das ist die Kugel ist $= \frac{2}{3}$ von einem Cylinder, der gleichen Durchmesser, und gleiche Höhe mit ihr hat, oder der den größten Zirkel zur Grundfläche, und den Durchmesser zur Höhe hat, den man nämlich um sie beschreiben kann, also daß sie ringsherum in der Mitte seine Seiten, und unten und oben in einem Puncte seine Grundflächen berührt.

§. 578. Dieser Satz ist eine edle Erfindung des Archimedes, darum er auch, wie man sagt, eine Kugel in einem Cylinder von gleicher Höhe und Durchmesser auf sein Grabmal zum Angedenken hat einhauen lassen. Vergleichen wir den Kegel die Kugel und den Cylinder miteinander, so verhalten sie sich wie die Zahlen 1, 2, 3.

L. §. 579. Der Kubus des Durchmessers einer Kugel verhält sich zu selber beynahe wie 300 zu 157.

B. Es sey der Durchmesser einer Kugel $= 100$, so ist der Kubus dieses Durchmessers $= 1000\,000$ (§ 521); und der größte Zirkel der Kugel beynahe $= 7850$ (§ 508): wenn man diesen mit 100 multiplicieret, so erhält man den Innhalt eines Cylinders der diesen Zirkel zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat (§ 536), nun $\frac{2}{3}$ davon machen die Kugel aus (§ 576) also verhält sich der Kubus des Durchmessers zur Kugel

wie

wie 1000 000 : $\frac{\pi}{3}$ 785 000 — beyde Glieder
= 3000 000 : 2×785000 — mit 3 multipl.

= 3000 000 : 1570 000 = 300 : 157
(§ 182, 1).

§. 580. Diese Zahlen geben die wahre Verhältniß des Kubus des Durchmessers zur Kugel so richtig nicht, daß man sie ohne merklichen Fehler bey Ausrechnung grosser Kugeln gebrauchen könnte. Etwas richtiger und bequemer geben diese Verhältniß folgende Zahlen 10000 : 5236, aber sie geben die Kugel ein wenig zu groß, da sie die vorige merklicher zu klein gaben. Will man sich aber der Logarithmen bedienen, so ist nach meiner Rechnung mit 10 Ziffern der genaueste für die Verhältniß des Kubus zur Kugel dieser hypothetische 9, 18998623.

§. 581. Es sey der Durchmesser einer Kugel gegeben, man soll ihren körperlichen Inhalt finden.

1. Bestimme den Kubus des Durchmessers (§ 521).

2. Und sprich wie 10000 : 5236 also verhält sich der gefundne Kubus zur Kugel.

Oder 1. such den Logarithmus des Durchmessers, und multipliciere ihn mit 3.

2. Zu diesem Producte addiere den Logarithmus 9, 71899623 (doch lasse soviel von den letzten Ziffern weg, so viel dieser Logarithmus mehr hat, als die, welche in denen Tabellen verzeichnet sind) und die Summe ist der hypothetische Logarithmus der gesuchten Kugel, der sich leicht in einen gemeinen verwandeln läßt.

3. Nun

3. Nun suche die dem gemeinen Logarithmus gehörige Zahl, so ist diese der Innhalt der Kugel.

z. B. Es sey der Durchmesser einer Kugel = 7", so wird der Kubus des Durchmessers 343, also sage wie 10000 : 5236 also 843 zur gesuchten Kugel, und du findest sie = 179", 593"'.

Oder mit Logarithmen such den Logarithmus von 7; du findest ihn in unsrer Tabelle 0, 8451, diesen multiplicire mit 3, so hast du 2, 5353, addiere dazu 9, 7190, so ist die Summe der hypothetische Logarithmus der Kugel 12, 2543 und also der gemeine 2, 2543, welcher kleiner ist als 2, 2553, der Logarithmus von 180, und grösser als 2, 2529 der Logarithmus von 179, woraus du schliessest der gesuchte Kugelinnhalt sey zwischen 179 und 180".

Nach grösseren Tafeln findest du 7 Log.	0, 8450980
	3
das dreyfache	2, 5352940
Log. der Verhält.	9, 7189886
Hypothet. der Kugel	12, 2542826
der gemeine	2, 2542826

diesem kömmt zu 179", 549"'

Eben so, es sey gegeben der Logarithmus des Durchmessers der Erde in Meilen, derer 15 einen Grad des grösten Zirkels ausmachen,

aus den grösten Tabellen	3, 2352438872
so ist das Dreyfache	9, 7057316616
addiere	9, 7189986223
Hypothet. Logarith. der Erde	19, 4247302839
gemeiner	9, 4247302839

diesem kommen zu 2659073145 Kubikmeilen.

§. 582.

§. 582. Es sey gegeben der körperliche Innhalt einer Kugel, man soll ihren Durchmesser finden.

1. Sprich: wie 5236 zu 10000 also der gegebene Innhalt der Kugel zum Kubus des gesuchten Durchmessers.

2. Wenn dieser ist gefunden worden, so zieh die Kubikzahl daraus, und diese wird der gesuchte Durchmesser seyn.

Oder, such den hypothetischen Logarithmus des Innhalts der Kugel.

2. Subtrahiere davon folgenden Logarithmus, 9, 7189986223.

3. Was überbleibt dividiere mit 3, so giebt der Quotient den Logarithmus des Durchmessers, und die dazu gehörige Zahl ist der Durchmesser selbst.

z. B. Es sey der körperliche Innhalt einer Kugel 180 Kubikschuhe so sprich: wie sich verhält 5236 zu 1000 also 180 zur vierten Zahl 343, 798: deren Kubikwurzel beynahe 7 ist. Will man sich der Logarithmen bedienen, so verfahrt man, also:

180 Hypothet. Logar.	12, 2553
Verhältniß Logarith.	9, 7193
Differenz	2, 5360
der dritte Theil davon	0, 8454

Dieses ist der Logarithmus beynahe von 7', also ist der gesuchte Durchmesser beynahe 7'

L. §. 583. Die Kugel ist gleich einer Pyramide, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundfläche, und den Stral zur Höhe hat.

B. Man zerschneide die Kugel mit flachen Durch-
F82 schnitten durch den Mittelpunct erstlich durch 3
F83 größte Zirkel abfd, af, bd die einander senkrecht durchschneiden, in 8 gleiche Theile, derer die Fig. 82 uns vier sehen läßt, die andern vier sind auf der hintern Seite. Einen Theil allein, wie er aus der Kugel herausgeschnitten aussieht, stellt die Fig. 83 vor. Es ist nämlich jeder dieser Theile von 3 Quadranten Cae, Ceb und Cab und einem Theil der spärischen Oberfläche eamb begränzet. Jetzt machen wir einen neuen Durchschnitt durch cem auf den Quadranten cab senkrecht, so wird dadurch das spärische Stück Caeb ferner in zwey kleinere Cema und Cemb zerschnitten, und jedes von diesen könnte man wieder mit einem Durchschnitte, der durch den Mittelpunct der Kugel und ein Eck des vorigen gieng, in zwey kleinere zerschneiden, und so stelle man sich vor, werde die Kugel immerfort in kleinere und kleinere Theile, und endlich in unendlich kleine zerschnitten, so werden diese kleinsten Theile lauter dreyeckichte Pyramiden seyn, derer jeder Grundfläche mit 3 unendlich kleinen Zirkelbögen von den größten Zirkeln begränzet werden; die spärische Grundfläche, weil sie unendlich klein ist, wird von einer ebenen unendlich wenig abweichen; die Seiten dieser Pyramiden werden Zirkelausschnitte seyn, derer Gränzen beyderseits der Stral der Kugel als Stral des größten Zirkels und ein unendlich kleiner Bogen von diesen, der für eine gerade Linie gilt, seyn werden: die Höhe jeder dieser Pyramiden wird von den Seiten

der

der Zirkel Ausschnitte nämlich dem Strale unendlich wenig unterschieden seyn (§ 460): also wird die Höhe einer jeden solchen Pyramide der Stral der Kugel, und aller miteinander ihre Grundfläche die Oberfläche der Kugel seyn: folglich der körperliche Innhalt von allen das Product aus der Oberfläche der Kugel in den dritten Theil ihres Strales, welches auch der körperliche Innhalt einer einzigen Pyramide wäre, die den Stral für ihre Höhe und die Oberfläche der Kugel für ihre Grundfläche hätte (§ 560 § 564): also ist die Kugel wirklich einer solchen Pyramide gleich (§ 16).

§. 584. Also ist der Innhalt der Kugel das Product aus ihrer Oberfläche in den dritten Theil ihres Strales, oder sechsten ihres Durchmessers. Z.

§. 585. Man findt also die Oberfläche einer Kugel, wenn man ihren körperlichen Innhalt durch den sechsten Theil ihres Durchmessers dividieret (§ 34). Z.

§. 586. Die Oberfläche der Kugel ist vier größten Zirkeln miteinander gleich. L.

Wir wollen den größten Zirkel der Kugel CM, und ihren Durchmesser D; und einen Cylinder CM zur Grundfläche, den Durchmesser aber zur Höhe hat E; die Kugel aber K, und die Oberfläche der Kugel SK heißen, so ist Z.

I.

$CM \times D = E$ (§ 536)

$\frac{2}{3} CM \times D = \frac{2}{3} E$ (§ 49)

III.

$SK = K : D$ (§ 585)

$= \frac{6K}{6}$ (§ 87)

$= \frac{6K}{D}$

$4CM = \frac{6K}{D}$ (II)

$SK = 4CM.$

II.

$K = \frac{1}{2} E$ (§ 577)

$\frac{2}{3} CM \times D = \frac{2}{3} E$ (I)

$K = \frac{2}{3} CM \times D = \frac{4}{6} CM \times D$

$6K = 4CM \times D$

$\frac{6K}{D} = 4CM$

3. §. 587. Wenn man also aus dem gegebnen Durchmesser einer Kugel ihren grösten Zirkel berechnet (§ 509), und diesen mit 4 multiplicieret, so erhält man die Oberfläche selber Kugel.

z. B. Den Flächeninnhalt des grösten Zirkels der Erdkugel haben wir § 509 gefunden = 2820475 Quadratmeilen; also ist die Oberfläche der Erde = 9281900 Quadratmeilen.

E. §. 588. Einen regulären Körper nennt man den, der mit lauter gleichen regulären Flächen begränzet ist.

§. 589. Reguläre Körper sind der Kubus, welcher in 6 Quadrate eingeschlossen ist: das Tetraedrum ist in 4, das Octoedrum in 8, das Icosaedrum in 20 gleichseitige Dreyecke eingeschlossen; das Dodecaedrum aber mit 12 regulären Fünfecken begränzet. Diese Körper lassen sich den Anfängern besser wirklich vor Augen legen, als in einer Figur vorstellen. Es sind aber ausser diesen keine andere reguläre Körper möglich.

§. 590.

§. 590. Den Innhalt eines jeden Körpers (seine Gestalt mag seyn, wie sie will) kann man, wenn er im Wasser sich nicht auflöset, also erforschen; man lege ihn in ein Geschirr, das man zuvor mit Wasser ganz gefüllt hat, und stelle dieses in ein anderes; man lege alsdann den Körper in das erste, und das in das andere überfließende Wasser messe man mit einem cylindrischen, oder prismatischen Geschirre aus; so ist das Maaß dieses Wassers, dem Maaße des Körpers gleich.

§. 591. Die ähnlichen Körper verhalten L. sich gegeneinander wie die Kubussen der ähnlich liegenden Seiten der Flächen, die ihre Gränzen sind, oder ihrer Durchmesser und anderer durch sie auf ähnliche Weise durch ähnlich liegende Puncte gezogener Linien.

Denn alle Körper lassen sich in lauter Pyra- B. miden zertheilen, derer Grundflächen ihre Oberfläche ausmachen, und die Scheitel in einem Puncte zusammen kommen; und, wenn die Körper ähnlich sind, sind auch diese Pyramiden einander ähnlich, und ihre Höhen gegeneinander, wie die Seiten der Grundflächen (§§. 279. 565.), diese aber wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten (§. 506.): also verhalten sich diese Pyramiden wie die Kubussen dieser Seiten (§. 128. 4.); und folglich verhalten sich auch die ganzen Körper also gegeneinander (§. 181. 3.). Da nun in ähnlichen Flächen jede ähnlich liegende Linie den ähnlich liegenden Seiten und die Durchmesser dem Umfange proportional sind (§. 246.), so sind auch ihre Kubussen einander proportional (§. 180. 3.): also verhalten sich solche Körper auch gegeneinander wie die Kubussen solcher Linien.

§. 592. Folglich verhalten sich die Kugeln Z. gegeneinander wie die Kubussen ihrer Diameter oder wie die Kubussen ihrer Stralen.

Die Trigonometrie.

E. §. 593. Die Trigonometrie ist eine Wissenschaft aus drey gegebnen Theilen eines Dreyeckes, dadurch es bestimmet wird, die übrigen durch Rechnung zu finden.

§. 594. Z. B. Zwo Seiten nebst dem Winkel, den sie miteinander machen, sind das Bestimmende eines Dreyeckes; sind diese 3 Stücke gegeben, so wird uns die Trigonometrie daraus die übrigen zweene Winkel und die dritte Linie zu berechnen lehren. Wir wollen aber hier nur die geradlinichten Dreyecke abhandeln, ohne die sphärischen, die man nur in der Astronomie braucht. Man lehrt freylich auch in der Geometrie die bestimmten Theile des Dreyeckes durch die bestimmende zu geben, aber nur mit den Handzirkel und Maaßstabe, mit denen man so genau nicht verfahren kann, wie mit den trigonometrischen Rechnungen, die sich auch auf Fälle erstrecken, da man mit den bemeldten Instrumenten gar nichts ausrichten würde.

E. §. 595. Trigonometrische Tabellen nenne ich die, welche nebst den Logarithmen der gemeinen Zahlen, auch die Logarithmen der Sinusse und Tangenten durch den ganzen Quadranten nach einem gegebnen Strale enthalten.

§. 596. Man hat verschiedene solche Tabellen. Einige enthalten die Logarithmen der gemeinen Zahlen von 1 bis 10000 und die Sinusse, Tangenten und Secanten nebst ihren Logarithmen von Minuten zu Minuten durch den ganzen Quadranten: einige, wie die des Vlacqs, welche Hentsche hat neu auflegen lassen, und die meisten neuern lassen die Logarithmen der Secanten weg, weil sie nicht so nöthig sind. Die, welche der Freyherr Christian Wolf zum Drucke befördert hat, lassen auch die Secanten selbst weg. Einige haben nur die Logarithmen von 1 bis 1000, und die Logarithmen der Sinusse und Tangenten durch alle Minuten des Quadranten: Es giebt auch

größere

größere, dergleichen im Jahre 1770 zu Avignon ans Licht getretten sind, welche von 10 zu 10 Secunden, ja sogar in den ersten 4 Graden von Secunden zu Secunden die Logarithmen der Sinusse und Tangenten darstellen, derer sich aber meist nur die Astronomen bedienen. Auch die Zahl der Ziffern, daraus die Logarithmen bestehen ist in verschiednen Tabellen verschieden. Für die Anfänger, damit sie, wenn sie auch keine andere Tabellen haben, sich doch damit einiger massen üben können, habe ich diesem Büchlein hinten eine Tabelle der Logarithmen der Zahlen bis 185, und eine der Logarithmen der Sinusse und Tangenten für jede Grade des Quadranten beygesetzt. Für die stumpfen Winkel nimmt man ihre Supplemente, nämlich die Grade ꝛc. des spitzigen Nebenwinkels (§. 535.).

§. 597. Man kann aber doch auch aus der angehengten Tabelle meistens ohne Fehler von einer oder zwo Minuten die Logarithmen der Sinusse und Tangenten, für Bögen und Winkel, die über eine gewisse Zahl Grade noch eine Zahl Minuten darüber haben, durch die Regel Detri finden. Kürze halber will ich die Weise, es zu thun, nur in einem Beyspiele zeigen.

Man verlange etwa den Logarithmus des Sinus von 48°, 46′ zu haben, so suche in unserer Tabelle unter den Logarithmen der Sinusse, den von 48°, und den von 49°, zwischen welche 48°, 46′ Minuten fällt; du findest den ersten 9, 8711, den andern 9, 8778, folglich ist ihr Differenz 67. Nun sage: ein Grad = 60′ bringt diese Differenz nämlich 67, was für eine Differenz geben 46′, und durch die Regel Detri findest du 51: diese Zahl 51 addiere zum Logarithmus von 48°, nämlich zu 9, 8711, so ist die Summe 9, 8762, der Logarithmus von 48° 46′.

§. 598. Kömmt entgegen ein Logarithmus eines Sinus vor, der sich in unserer Tabelle nicht befindet, z. B. 9, 8762, so subtrahiere davon den nächst kleinern unter den Logarithmen der Sinusse 9, 8711, welcher der Logarithmus von 48° ist, und bemerke die Differenz 51. Eben diesen Logarithmus 9, 8711 subtrahiere von dem nächst folgenden, nämlich von 9, 8778 dem Logarithmus von 49°, und bemerke auch diese zweyte Differenz 67, alsdann sprich: diese zweyte Differenz 67 giebt einen Grad oder 60′, wie viel Minuten giebt der erste? und du findest

durch die Regel Detri 46: also ist 9, 8762 der Logarithmus des Sinus von 48°, 46′. Und eben so verfährt man mit den Logarithmen der Tangenten.

L. §. 599. In jedem Dreyecke verhalten sich
F.49 die Seiten gegeneinander wie die Sinusse der gegenüberstehenden Winkel.

z. B. In dem Dreyecke ABD ist AB: AD = Sin. D: Sin. B.

B. Denn jedes Dreyeck kann man betrachten, als stünde es mit seinen dreyen Ecken an der Peripherie eines darum beschriebenen Zirkels, und seine Seiten verhalten sich gegeneinander wie die Sennen der Bögen, auf denen die Schenkel der gegenüberstehenden Winkel aufstehen (§. 445.), also auch wie die halben Sennen (§. 182.), das ist, wie die Sinusse der halben Bögen (§. 435.). Da nun eben diese das Maaß der gegenüberstehenden Winkel sind, so erhellet, daß die Seiten eines Dreyeckes sich gegeneinander, wie die Sinusse der entgegengesetzten Winkeln verhalten.

Dieser Lehrsatz ist der Hauptgrund der Trigonometrie, nachdem dieser hier, und einige andere schon in der Geometrie festgesetzt worden, so haben wir nur noch die fürnehmsten trigonometrischen Aufgaben mit ihren Auflösungen anzuführen. Zuerst wollen wir die rechtwinklichten, alsdann die schiefwinklichten Dreyecke durchgehen.

In rechtwinkelichten Dreyecken.

A. §. 600. Es sey gegeben der Cathetus *AC* nebst
F.84 dem daranliegenden Winkel *A*, den andern Cathetus *BC* zu finden.

a. Da der Cosinus von A, nämlich der Sinus B (§. 439.) sich zum gegenüberstehenden Cathetus AC ver-

verhält wie der Sinus A zum gegenüberstehenden Cathetus BC (§. 599.), so geht die Rechnung mit Logarithmen also für sich.

1. Suche in den trigonometrischen Tabellen die Zahl mit der der gegebene Cathetus AC ausgedrückt wird unter den Logarithmen der Zahlen.

2. in eben diesen Tabellen suche den Logarithmus des Sinus und den Logarithmus des Cosinus von A unter den Logarithmen der Sinusse.

3. Den ersten dieser zweenen addiere zum schon gefundenen Logarithmus von AC; den letztern ziehe von dieser Summe ab, und die Differenz wird der Logarithmus des Cathetus CB seyn.

4. Suche nun die dazugehörige Zahl unter den Logarithmen der Zahlen, und sie ist jene, die die Größe des Cathetus CB ausdrückt.

z. B. Es AC = 4′, A = 37°

So ist dieses die Rechnung

AC Log. 0, 6021
A Log. 9, 7795
Summe 10, 3816
Cosin. A Log. 9, 9023
Differenz 0, 4793 Log. BC

In unserer Tabelle kömmt unter den Logarithmen der Zahlen nächst zu diesem der nächst kleinere 0, 4771, welcher der Logarithmus von 3 ist, woraus du abnimmst, daß die Linie CB ein wenig größer sey als 3′, doch kleiner als 4′, weil der Logarithmus von 4 schon größer ist, als unser gefundner. Willst du nun auch wissen, wie viel Zolle die Linie CB noch über 3′ habe; so vermehre die Charakteristica um Eins, und suche wieder den Logarithmus in der Tabelle auf, als wäre er 1, 4793, und du wirst finden, daß 1, 4771 der Logarithmus von 30 etwas kleiner sey als dieser, und 1, 4914 der Logarithmus von 31 größer als er: daraus schießest du, daß die Linie

CB

CB zwar gröſſer sey als 3′ oder 30″ doch kleiner als 31″. Bist du damit noch nicht zu frieden, so vermehre die Charakteristika noch um Eines, und suche die dazu gehörige Zahl entweder in gröſsern Tabellen, oder in der unsern durch Hilfe der Regel Detri (§ 185), und du wirst in den gröſsern Tabellen finden, daſs 2, 4786 der Logarithmus von 301 kleiner sey als der unsere, herentgegen, daſs 2, 4800 der Logarithmus von 302 gröſser sey als selber; folglich sey CB gröſser als 3′ 0″ 1‴ aber kleiner als 3′ 0″ 2‴ Endlich mit der Charakteristika 3 würden wir 3, 4793 den Logarithmus von 3015 finden, der auſser der Charakteristika völlig mit dem unsern übereins trift, ist also also CB = 3′, 0″, 1‴, 5⁗.

§. 601. Es hätte sich diese Aufgabe auch noch anders auflösen lassen: denn es ist der ganze Sinus zur Tangente von A = AC : CB; weil CB die Tangente des Winkels A wird, wenn AC der Stral ist (§ 478). Wenn man also 9, 8771 den Logarithmus der Tangente von A zu 0, 6021 dem Logarithmus des Cathetus AC addieret und von der Summe 10, 4792 den ganzen Sinus 10, 0000 abzieht, bleibt 0, 4792 der Logarithmus des Cathetus CB über, welcher von dem zuvor gefundnen in der letzten Ziffer (bey der man allein nicht allezeit völlig eintrift) nur um Eines unterschieden ist.

§. 602. Damit wir einen Nutzen dieser Aufgabe zeigen, setzen wir BC sey eine Höhe zu der man hinkommen kann als etwa ein Baum ein Haus ꝛc. und der Winkel A sey mit einem Instrumente gemessen worden, oder auf andere Weise bekannt, und AC sey mit Ketten gemessen, so läſst sich die Höhe CB daraus genau berechnen. Allein diese und nachfolgende Aufgaben sind von weit gröſserem Nutzen, und Gebrauche, die man aber hier nicht erklären kann.

U. §. 603. Es sey die Hypothenuse *AB* und einer der daran liegenden Winkel *A* oder *B* gegeben, man soll den Cathetus *BC*, der dem Winkel *A* gegenüber steht, berechnen.

Weil

Weil der ganze Sinus : AB = Sin. A : a. CB (§ 599), so addiere den Logarithmus der Hypothenuse AB zum Logarithmus des Sinus des Winkels A.

2. Von der Summe subtrahiere den ganzen Sinus, so ist die Differenz der Logarithmus des Cathetus CB.

z. B. Es sey AB = 5′, A = 36°, 52′;
so sieht die Rechnung
also aus

AB Log.	0,6990
A Log.	9,7781
Summe	10,4771
Ganz. Sin. Log.	10,0000
Differenz	0,4771

Log. CB

Diesem Logarithmus kömmt die Zahl 3 zu; also ist CB = 3′

§. 604. Wenn in dieser oder der vorgehenden Aufgabe an statt des Winkels A unmittelbar der Winkel B gegeben wird, so ist eben darum auch A bekannt (§ 378) und läßt sich daraus BC finden.

§. 605. Es sey die Hypothenuse *AB*, und einer von den Catheten *AC* gegeben; man soll den Winkel *B*, der ihm gegenübersteht, und durch diesen den Winkel *A* suchen. A.

Weil AB : ganz. Sin. = AC : Sin. B a. (§ 599), so addiere den Logarithmus des ganzen Sinus zum Logarithmus des Cathetus AC, und von der Summe subtrahiere den Logarithmus der Hypothenuse; so wird die Differenz der Sinus des Winkels B, und Cosinus des Winkels A seyn (§ 378 und § 439).

z. B.

z.B. Es sey AB = 5, AC = 4 AC Log. 0, 6021
Sieh hier die ganz. Sin. Log. 10, 0000
Berechnung Summe 10, 6021
AB Log. 0, 6990
Differenz 9, 9031 Sin. B Log.
für den man nächstens findt 36°, 52'.

u. §. 606. Es seyn die Catheten gegeben, man soll die daranliegenden Winkel finden.

a. Weil CB : ganz. Sin. = AC : Tang. B (§ 478).

1. Addiere den Logarithmus eines Cathetus zum Logarithmus des ganzen Sinus.

2. Von der Summe subtrahiere den Logarithmus des andern Cathetus; so wird die Differenz der Logarithmus der Tangente des Winkels seyn, der dem ersten Cathetus gegenübersteht, und die Contangente des andern spitzigen Winkels.

z.B. Es sey AC = 4' CB = 3' AC Log. 0, 6021
Sieh die Berechnung. ganz. Sin. Log. 10, 0000
Summe 10, 6021
CB Logar. 0, 4771
Differenz 10, 1250 Log. Tan. B.
darauf trift B 53°, 8'; A aber 36°, 52'.

r. §. 607. Es sey ein Cathetus *AC*, mit dem entgegen gesetzten Winkel *B* gegeben, man soll die Hypothenuse finden.

a. Weil Sin. A : CB = ganz. Sin. : AB (§ 599), so

1. Ad-

1. Addiere den ganzen Sinus zum Logarithmus des gegebnen Cathetus.

2. Von der Summe subtrahiere den Logarithmus des Sinus des gegenüberstehenden Winkels; und die Differenz wird der Logarithmus der Hypothenuse seyn.

z. B. Es sey AC=4′, B=53°. Sieh die Berechnung

AC	Log.	0, 6021
ganz. Sin.	Log.	10, 0000
Summe		10, 6021
Sin. B	Log.	9, 9023
Differenz		0, 6998 Log. Hyp.

Ist also die Hypothenuse = 5′

§. 608. Es seyn die Catheten gegeben, man soll die Hypothenuse suchen.

1. Suche zu erst die Winkel A und B (§ 606) a.

2. Darnach aus einem der zweenen Catheten z. B. AC und dem gegenüber liegenden Winkel B suche die Hypothenuse (§ 607).

In schiefwinkelichten Dreyecken.

§. 609. Es sey gegeben die Seite *AB* a. mit dem gegenüber stehenden Winkel *C*, und F58 einem daran liegenden *A*, man soll die diesem entgegengesetzte Seite *CB* finden.

Weil Sinus C : AB = Sinus A : CB (§ 599) so

1. Addiere den Logarithmus der Seite AB zum a. Logarithmus des Sinus A.

2. Von

2. Von der Summe subtrahiere den Logarithmus des Sinus C, und es bleibt der Logarithmus der Seite C B übrig.

z. B. Es sey C = 30°, 50′, AB = 50′, AB Log. 1,6990
A = 96°, also sein Suplement = 84°, (§ 596). Sin. A Log. 9,9976
Summe 11,6966
Sin. C Log. 9,7097
Differenz 1,9869 Log CB

Diesem gehören 97′ oder genauer 97′, 0″, 3‴

§. 610. Es ereignet sich beym Feldmessen gemeiniglich, daß der Winkel C, welcher der bekannten Seite oder Grundlinie AB gegenüber steht, unmittelbar nicht gegeben sey, wohl aber die Winkel A und B, die an der Grundlinie AB liegen, da muß man den dritten Winkel C zuvor durch die andern bestimmen: man addiert nämlich A und B in eine Summe, die man von 180° abzieht, so giebt die Differenz den Winkel C (§ 370). Diese Aufgabe kömmt in der Geodäsie am öftesten vor, die nachfolgenden seltner; darum möchte sie den Anfängern, die nicht tiefer in die Mathematik sich hinein wagen wollen, fast allein genug seyn.

§. 611. Wenn beyde Seiten AB und CB gesucht werden, so ist um sie zu finden folgende Art bequemer.

1. Suche den hypothetischen Logarithmus der Seite AB.

2. Davon zieh den Logarithmus des Sinus des entgegenstehenden Winkels C ab; so giebt die Differenz den hypothetischen Verhältnißlogarithmus.

3. Zu diesem addiere erstlich den Logarithmus von einem Winkel A, alsdann den von dem andern anliegenden Winkel C: und die erste Summe giebt dir den hypothetischen Logarithmus der entgegen gesetzten Seite BC, die andere den von AC; und wenn aus der Charakteristika 10 weggeworfen wird, so werden aus dem hypothetischen gemeine Logarithmen.

z. B.

z. B. Es sey A = 96°, 2′ also sein Supplement = 83°, 58′; B sey = 53°, 8′; C = 30°, 50′; AB = 5′

so verfahr also: AB hypoth. Log. 10, 6990
Sinus C Log. 9, 7097
Differenz 0, 9893 Hyp. Ver. Log.
Sinus A Log. 9, 9976
Summe 10, 9869 Hyp. Log. BC
Sinus B Log. 9, 9031
Summe 10, 8924 Hyp. Log. AC

Mit diesen Logarithmen, wenn sie in gemeine verwandelt werden, treffen ein für AC 78′ oder genauer 78′ 0′ 5‴; für BC, 97′ oder genauer 97′, 0″, 3‴.

§. 612. Es sey gegeben die Seite *AB*, mit dem entgegen gesetzten Winkel *C*, und der Seite *AC*, man sucht den Winkel *B*, der dieser Seite entgegen steht; und auch der dritten *A*, doch, daß man die Art dieser Winkel schon wisse, wenn *AB* kürzer als *BC* ist.

Weil AB : Sinus C = AC : Sinus B (§ 599): so

1. Addiere den Sinus des Winkels C zum Logarithmus der Seite AB.

2. Von der Summe subtrahiere den Logarithmus der Seite AB; so ist die Differenz der Logarithmus des Sinus B.

z. B. Es sey AB = 50′, AC = 78′, C = 30°, 50′;
so ist die Rechnung diese: AC Log. 1, 8921
Sinus C Log. 9, 7097
Summe 11, 6018
AB Log. 1, 6990
Differenz 9, 9028 Log. (Sin. B.

Dieser

Dieser weiset uns 53°, 5′, und sein Supplement ist 126°, 55′; also ist B, wenn er ein spitziger Winkel ist, = 53°, 5′; wenn er aber ein stumpfer ist = 127°, 55′: der Winkel A aber = 180° — B — C im ersten Falle 96°, 5′; im andern 23°, 15′.

A. §. 613. Aus zwoen gegebnen Seiten *AB* und *BC*, und dem dazwischen liegenden Winkel *B*, die andern zweene *A* und *C* zu finden.

a. Weil $AB + BC : BC - AB = \text{Tang.} \frac{A+C}{2} : \text{Tang.} \frac{A-C}{2}$ (§ 481).

1. So suche die Summe der zween Winkel A und C (§ 370).

2. Und darnach ihre Differenz auf folgende Weise:

Zum Logarithmus der Tangente der halben Summe der Winkeln A + C, addiere den Logarithmus der Differenz der zwo Seiten AB und BC; und von dieser Summe subtrahiere den Logarithmus der Summe von den zwoen Seiten AB und BC, so ist die Differenz die Tangente der Differenz der gesuchten Winkel.

3. Nun die also gefundene Differenz der gesuchten Winkel addiere zu ihrer halben Summe, so hast du den größern A; subtrahiere sie von ihrer halben Summe, so hast du den kleinern Winkel B (§ 156).

z. B. Es sey AB = 50′, BC = 97′, B = 53° 8′; so ist AB + BC = 147′; BC — AB = 47′; A + C = 180° — B = 126°, 52′; $\frac{1}{2}$ (A + C) = 63°, 26′

und

und die Berechnung $\frac{1}{2}$ (A + C) Log. der Tang. 10, 3010.
BC — AB Log. 1, 6721.
Summe 11, 9731.
AB + BC Log. 2, 1673.
Differenz 9, 8058.

Diese Zahl suche unter den Tangenten, und du findest, daß sie die Tangente sey nächstens von 32°, 36′

addiere $\frac{1}{2}$ (A + C) 63°, 26′

Summe = Winkel A. 96° 2′
Subtrahiere $\frac{1}{2}$ (A+C) 63°, 26′
Differenz = Winkel C, 30°, 50′

§. 614. Wenn die Seiten AB und BC nebst dem Winkel B gegeben sind, und du verlangst die Seite AC zu finden, so suche zuerst den Winkel A oder den Winkel C (§ 613), so wirst du daraus AC bestimmen können (§ 609). Es ist nämlich

Sin. A : BC = Sin. B : AC
oder Sinus C : AB = Sin. B : AC

§. 615. Wenn alle drey Seiten *AB*, *AD*, u. *BD* gegeben sind, die Winkel zu finden. F92

Weil BD : (AD + AB) = (AB — AD) : Bn a. (§ 471) so

1. Addiere den Logarithmus von AD + AB zum Logarithmus von AB — AD, und von der Summe subtrahiere den Logarithmus BD, so wird die Differenz der Logarithmus Bn, und die ihm zukommende Zahl Bn seyn.

2. Subtrahiere Bn von BD, und die Differenz nD halbiere, damit du DC erhaltest.

3. Weil

3. Weil ACD ein rechter Winkel (§ 434) ist, so kannst du aus AD und DC den Winkel D (§ 605), und darnach auch die übrigen finden (§ 612).

z. B. Es seyn AD = 50′, BD = 97′, AB = 78′; so ist AD + AB = 128′, AB — AD = 28

Die Berechnung sieht also aus: AD+AB Log. 2, 1072
AB—AD Log. 1, 4472
Summe 3, 5544
BD Log. 1, 9868
Differenz 1, 5676

Darauf treffen 36′, 9″, 5‴; ist also Dn = DB — Bn = 9700‴ — 3695‴ = 6005‴; folglich DC = nD: 2 = $3002^{5\,IV}$ beynahe = 30′. Da dann also beynahe AD : DC = 5 : 3 ist, wird AC beynahe 4, und der Winkel ADC beynahe = 53°, 8′ seyn (§ 605).

Suche nun auch den Winkel B (§ 612). AD Log. 1, 6990
des Sinus ADB. 53°. 8′ Log. 9, 9031
Summe 11, 6021
AB Logarith. 1, 8921
Differenz 9, 7100
(Sin. B Log.

Dieser nun ist der Logarithmus von 30°, 52′ = den Winkel B; folglich ist B + D = 30°, 52′ + 53°, 8′ = 84°; und A = 96° (370).

Die höhere Geometrie.

E. §. 616. Man nennt jenen Theil der Geometrie, die höhere der nicht nur von dem Zirkel und der Zirkellinie und den daraus entstehenden Körpern, sondern auch von andern krummen Linien,

und

und Flächen, die sie umfangen, und Körpern, die aus ihrer Bewegung erzeugt werden, handelt.

§. 617. Die gemeine Geometrie läßt alle andere krumme Linien außer dem Zirkel unberührt, die höhere aber geht auch über den Zirkel wieder her, behandelt ihn auf eine andere Art, vergleicht ihn mit andern krummen Linien, und erstreckt sich über alle Arten von diesen, sonderlich auf die, welche durch verschiedne Durchschnitte des Kegels mit ebenen Flächen entstehen und Kegelschnitte genennt werden. Wir werden hier, nach dem wir ein wenig von krummen Linien überhaupt werden geredet haben, nur die Kegelschnitte und einige ihre merkwürdigere Eigenschaften durchgehen, jene nämlich, die man für die Physick zu wissen nöthiger hat; darnach noch etwas weniges von der Cyclois beysetzen.

§. 618. Wenn eine Linie von einem Orte aus- G.
geht, und in einer unendlichen Ebene sich selbst parallel fort bewegt, so beschreibet sie eine ebene Fläche, die wenigst zum Theile, ja ganz begränzet ist, wenn ihre Bewegung endlich aufhört.

Denn fließt eine Linie also fort, so ist wenigst der Raum, den sie in gewisser Zeit durchgelaufen hat, begränzet, obgleich der noch nicht durchgelaufene unbegränzet ist, hört aber ihre Bewegung einmal auf, so hat ohne Zweifel der von ihr durchgelaufene Raum seine Gränzen: denn diese Linie selbst, wie sie im Anfange war, und wie sie zu Ende ist, begränzet sie unten und oben; rechter und linkerseits aber begränzen diesen Raum die Linien, welche durch das Fortfließen der zweenen äußersten Puncte der Zeugungslinie entstanden sind: folglich ist dieser Raum von allen Seiten begränzet.

§. 619. Wenn die Zeugungslinie PM im Fort- F.85
fließen immer wächst, oder immer abnimmt, oder bald wächst bald abnimmt, so werden die Linien, welche in ihrem Fortlaufen entstehen, ehe sie an ihr Ende kömmt, veränderliche Größen genennt; aber

aber die ganze Linie an der sie herfließt, bis sie ruhet, und jede andere, die in dem einmal durchgelaufenem Raume zwischen zweenen bestimmten Puncten liegt, heißt eine beständige oder unveränderliche Größe.

z. B. Es fließe eine Linie MP in einer ebenen Fläche an der Linie AP daher, also daß der äußerste Punct P beständig an der Linie AB bleibe; anfänglich sey diese Linie MP, da sie von A ausgeht, unendlich klein, sie wachse aber, da sie fortfließt, bis sie in BE gelangt, immerfort; so werden die Linien AP und PM die veränderlichen seyn: denn da der Punct P der Linie PM sich von A immer weiter entfernet, wächset AP immerfort, und PM mit ihr; weil diese Linie, wie wir setzen, im Fortfließen immer länger wird, bis der Punct P in B gelangt: die Linie AB aber ist eine beständige. Und nachdem die ganze Fläche ABE, durch bemeldte Bewegung der Linie MP einmal gestaltet ist, kann man darauf von jedem gegebnen Puncte zu einem andern gegebnen eine beständige Linie ziehen; denn die veränderlichen Linien sind nur in der Erzeugung der Figur.

E. §. 621. Die gerade Linie AB, in der der Punct P der Linie MP bleibt, da sie von A gegen B fortfließt, heißt die Linie der Abscissen; die gerade Linie AP aber, die Entfernung nämlich des Punctes P von einem Puncte in der Linie AB, wo es immer seyn mag, heißt eine Abscisse; und dieser Punct selbst heißt der Anfang oder Ursprung der Abscissen. Die Linie PM, oder vielmehr die Größe dieser veränderlichen Linie, die sie in jedem Puncte P erhält, heißt eine Ordinate, oder Halbordinate; und der Punct A der Achse, wovon die Linie PM, da sie noch unendlich klein war, ausgieng, heißt die Scheitel der Linie AM. Es ist aber AM, außer wenn ein Dreyeck beschrieben wird, allezeit eine krumme Linie.

§. 622.

§. 622. Der Anfang der Abscissen kann sowohl in der Scheitel der krummen Linie A, als anderswo in der Linie AB entweder innerhalb der krummen Linie, oder außer ihr, wenn man AB über A hinaus verlängert, angenommen werden. Aber in dem, was wir hier abhandeln, nehmen wir ihn beständig in A. F.86

§. 623. Es sind also alle Ordinaten unter einander parallel, und machen alle mit der Linie der Abscissen den nämlichen Winkel: denn alle machen den Winkel mit ihr, den PM die Beugungslinie mit ihr macht; weil diese alle Ordinaten, eine nach der andern decket, da sie die Fläche beschreibt, die von der krummen Linie, die der Punct M in seiner Bewegung macht, begränzet wird. §.

§. 624. Die Linie AE (sey sie krumm oder gerad) welche der Punct M beschreibet, da die veränderliche Linie MP, nach oben (§ 620) beschriebner Art fortläuft, heißt einig, wenn die Ordinaten mit den Abscissen immer nach einem nämlichen Gesetze wachsen, und die Gleichung, welche dieses Gesetz ausdrücket, heißt die Aequation oder Gleichung dieser Linie. G. F.85

§. 625. Man kann zwar auch mehr krumme Linien also aneinander setzen, daß sie nur eine zu seyn scheinen, wenn man sie nämlich so zusammen setzet, daß jede zwey Stücke in dem Vereinigungspuncte eine gemeinschaftliche Tangente haben: aber in der Geometrie kann man eine solche zusammengesetzte Linie nicht für eine einige Linie halten, noch durch eine einzige Gleichung ausdrücken: dergleichen sind die Schnecken- oder Spirallinien die man aus Zirkelbögen zusammen setzt, und die scheinbare Ellipse die wir § 712 zu gestalten lehren werden.

§. 626. Willkühriges Gesetz: In den Gleichungen dieser Linien wird gemeiniglich jede Abscisse AP, durch x, jede Ordinate PM aber durch y,

und die beständigen Größen durch die ersten Buchstaben des Alphabets a, b ꝛc. ausgedrückt.

3. §. 627. x also und y bedeuten in den Gleichungen die veränderlichen Größen. Es bedeutet nämlich x nicht eine gewisse bestimmte Abscisse, sondern ein jede, und y die ihr zugehörige Ordinate oder Halbordinate: und eben so gilt y für jede Ordinate, oder Halbordinate; und x für ihre Abscisse.

4. §. 628. Wenn in der Gleichung einer Linie weder x noch y über den ersten Grad hinauf steigt, so heißt selbe Linie eine Linie der ersten Ordnung; wenn aber x oder y in der Aequation einer Linie auf den zweyten, dritten ꝛc. Grad hinauf steigt, so ist eine solche Linie eine der zweyten, der dritten Ordnung ꝛc.

z. B. $ax = by$ ist eine Gleichung einer Linie der ersten Ordnung, $ax = by^2$ ist eine Gleichung der zweyten, $ax^2 = y^3$ ist eine Gleichung der dritten Ordnung.

A. §. 629. Es sey die Gleichung einer Linie gegeben, man soll einer jeden Abscisse ihre gehörige Ordinate oder Halbordinate bestimmen.

a. 1. Man suche den Werth von y, wie sonst in den Gleichungen durch die Reduction die Wurzel gesucht wird, daß nämlich in einem Gliede y allein bleibe, und in das andere sein Werth komme, (§ 151 und folgende).

2. Darnach nehme man von x verschiedene willkührige Werthe an, so bekömmt man, wenn man nach der herausgebrachten Formel y berechnet, für jedes x sein y.

z. B.

z. B. Aus der Gleichung $ax = by$ bekomme ich für die Ordinaten diese Formel $ax : b = y$ oder $(a : b)\, x = y$. Nun setzen wir $x = 1$, darnach $x = 2$, darnach $x = 3$ ꝛc. so ist das erste $y = a : b$, das zweyte $= 2\, a : b$ das dritte $= 3\, a : b$ ꝛc.

§. 630. Es seyn gegeben, die Gleichung einer Linie, und die Werthe der darinnen befindlichen beständigen Größen, nebst dem Winkel, denn die Ordinaten oder Halbordinaten mit der Linie der Abscissen machen; man soll sie wirklich beschreiben. A.

1. Nimm verschiedene Werthe von x an, und suche die dazu gehörige Ordinaten oder Halbordinaten (§ 629). a.

2. Zieh eine gerade Linie AB, und bestimme darinnen nach einem erwählten Maaßstabe die Abscissen A 1, A 2 ꝛc. nach den abgenommenen Werthen von x.

3. Setze an jede Abscisse A 1, A 2 ꝛc. an ihren Enden 1, 2 ꝛc. eine gerade Linie unter dem gegebnen Winkel mit AB hin; und gieb ihnen die Länge der Ordinaten oder Halbordinaten, die sie nach der Rechnung haben sollen:

4. Durch die Ende dieser Ordinaten oder Halbordinaten zieh eine Linie 1ME, so ist sie die, welche die gegebne Aequation ausdrücket.

§. 631. Wenn diese Linie nicht eine gerade ist, muß man mehrere Puncte, und um so viel mehrere Puncte, sie richtig zu ziehen, bestimmt haben, je mehr sie sich krümmt, sonderlich an den Orten, da sie sich mehr krümmt als an andern.

L. §. 632. Die Linie deren Gleichung ist $ax = by$, ist eine gerade Linie.

B. Denn es sey ax = by, so ist a : b = y : x (§ 178); also hat jede Abscisse zu ihrer Ordinate die nämliche Verhältniß: es ist aber eine wesentliche Eigenschaft des Dreyeckes, daß, wenn man mit der Grundlinie EB eine parallele MP wo immer durchzieht, allezeit MP : PA = EB : BA, nämlich MP : PA immer in der nämlichen Verhältniß sey. (§ 400); folglich müssen die Puncte M aller Ordinaten PM, in die Seite des Dreyeckes AE fallen, und diese Seite die nothwendig eine gerade Linie ist, gestalten, da PM die Fläche ABE nämlich ein Dreyeck im Fortfließen erzeuget.

§. 633. Man kann also jedes Dreyeck betrachten, als wäre es durch das Fortfließen einer veränderlichen Linie MP entstanden, die, da ste in A war, unendlich klein war, also daß dort der Punct M in P fiel, aber von diesem Puncte aus sey sie immer gleichförmig nach Verhältniß ihrer Entfernung von A gewachsen, daß also die Proportion AP : PM die nämliche geblieben. Darum ist die Gleichung einer geraden Linie und zwar diese alleine eine Gleichung der ersten Ordnung: alle höhere gehören für krumme Linien, und heißt man krumme Linien der ersten Ordnung, derer Gleichung von der zweyten ist; krumme Linien der zweyten Ordnung derer Gleichung der dritten ist ꝛc.

E. §. 634. Man sagt eine Verhältniß lasse sich geometrisch bestimmen, wenn sie sich durch zwo Linien, derer Länge geometrisch kann bestimmet werden, ausdrücken läßt.

Also z. B. die Verhältniß 1 : $\sqrt{2}$ läßt sich geometrisch bestimmen: denn wenn man zwo gerade Linien von gleicher Länge unter einem rechten Winkel zusammen setzt, so verhält sich die Hypothenuse zu jeder derselben wie $\sqrt{2}$:

1 (§ 364). Aber ein Bogen der Peripherie eines Zirkels oder die ganze Peripherie lassen sich nicht geometrisch bestimmen, weil bisher noch niemand eine gerade Linie hat ausfinden können, deren Größe vollkommen einem gegebnen Zirkelbogen oder der ganzen Peripherie gleich wäre.

§. 635. Eine **geometrische krumme Linie** ist die, in der die Verhältniß der Abscissen zu ihren Ordinaten oder Halbordinaten sich geometrisch bestimmen läßt; andere bey denen dieses nicht angeht, heißt man **mechanische Linien.** E.

§. 636. Eine (curva plana) **ebene krumme Linie** nennt man die, welche ganz in einer ebenen Fläche liegt; liegt aber eine krumme Linie nicht in einer ebenen Fläche, so heißt sie eine **krumme Linie von doppelter Krümmung** (curva duplicis curvaturæ). E.

§. 637. Ich habe hier die Begriffe von verschiedenen Arten krummer Linien angeführt, nicht als ob wir von allen diesen handeln wollten, sondern nur allein, daß wir wissen, was ihre Namen, derer sich einige neuere Philosophen bedienen, sagen wollen. Ich bemerke auch, daß die Kegelschnitte, von denen wir bald darnach handeln werden, alle miteinander ebene krumme Linien, und zwar geometrische der ersten Ordnung seyn.

§. 638. Setzen wir eine gerade Linie PM, sey anfangs in A unendlich klein; von da aus fliesse sie in B an der Linie AB her, und wachse rechter und linkerseits nach einem gewissen Gesetze immer gleich, oder nehme auch wieder nach diesem Gesetze ab, doch so, daß allezeit MP = mP sey, und also AB die Linie der Abscissen, mitten durch die Linie der Ordinaten Mm gehe; so beschreibet diese Linie mit ihren Enden M und m zwo krumme Linien oder vielmehr zweene Aerme oder zwo Seiten einer krummen Linie, und man heißt die Linie AB den Durch- E. F86

messer der krummen Linie; und zwar die Achse derselben, wenn sie die Ordinaten mM senkrecht durchschneidet. Es ist nämlich eine jede gerade Linie ein Durchmesser einer krummen, wenn sie die Ordinaten, unter was immer für einem Winkel, mitten durchschneidet; aber nur alsdann ist sie die Achse, wenn dieser Winkel ein rechter ist. Der Punct A, wo der Durchmesser die krumme Linie erreichet, oder durchschneidet, heißt die Scheitel der krummen Linie.

§. 639. In den Gleichungen der krummen Linien, in denen man sie auf einen ihrer Durchmesser bezieht, bedeutet y nicht die ganze Ordinate mM, sondern nur die Halbordinate PM oder pm; x aber die dazu gehörige Abscisse. Es gilt nämlich eine solche Gleichung für beyde Aerme der krummen Linie, obwohl sie, wenn der Durchmesser nicht die Achse selbst ist, einander nicht allezeit ähnlich sind. Ist aber der Diameter die Achse selbst, so ist es klar, daß ein Arm wie der andere beschrieben werde, und daß sie also einander gleich und ähnlich seyn müssen.

E. §. 640. Wenn man die Achse oder den Durchmesser BA einer krummen Linie verlängert, bis sie eine Tangente MT erreichet, so nennt man das Stück derselben TP, zwischen dem Puncte T, da die Tangente die Achse oder den Durchmesser erreicht, und dem Puncte P, da eine Ordinate Mm von dem Berührungspuncte M durch die Achse und den Durchmesser geht, eine Subtangente; das Stück derselben PR aber, von diesem Puncte P an bis an den Punct R, da die Linie RM, welche auf die Tangente in dem Berührungspuncte M normal ist, diese Achse oder diesen Durchmesser erreichet, heißt eine Subnormallinie.

E. §. 641. Die Ergänzung des Winkels, den zwo sehr kleine Sennen, die in einem Puncte zusammenstossen, miteinander machen, zu 180 Grade heißt

heißt der Wendungswinkel (angulus flexus). Je größer dieser Winkel ist, je größer, sagt man, sey in diesem Puncte die Krümmung dieses Bogens. Man muß aber die Bögen, die man mit einander vergleicht, fast unendlich klein und gleich groß annehmen.

§. 642. Je größer also der Stral eines Zirkelbogens ist, je kleiner ist seine Krümmung. Z.

§. 643. Wenn man auf der Normallinie, die nämlich auf eine Tangente einer krummen Linie in einem Puncte M senkrecht ist, einen Fuß eines Zirkels einsetzet und mit dem andern durch den Punct m einen Zirkelbogen beschreibt, so ist die Krümmung dieses Bogens größer oder kleiner, nachdem der Stral, mit dem er ist beschrieben worden, größer oder kleiner ist, und hat also auch eine kleinere oder größere Krümmung. Nun jener Zirkel, dessen Krümmung in dem Puncte M, der Krümmung selber krummen Linie, in dem nämlichen Puncte M am nächsten kömmt, heißt der berührende Zirkel (circulus osculator); und der Stral, womit er beschrieben wird, der Stral der Krümmung oder Stral des Berührungszirkels (radius curvaturæ, oder radius circuli osculatoris). Z. E.

§. 644. Unter den Zirkelbögen, die man aus Puncten in der Normallinie als ihren Mittelpuncten beschreibet, gehn die gar zu großen ober der krummen Linie, auf der erhabnen Seite, und die gar zu kleinen unter ihr durch, und verlassen sie einige gar bald; aber der berührende Zirkel bleibt unter allen noch am längsten bey ihr, und kann noch ein merklicher Bogen dieses Zirkels von einem Bogen der krummen Linie, die er berühret, kaum unterschieden werden, man kann sie in gewissen Fällen einen für den andern gelten lassen: und darum hat auch die Kenntniß des Strales der Krümmung in der Physik ihren Nutzen, davon wir unten §. 669. und §. 724. Meldung thun werden.

§. 645.

A. §. 645. Man soll untersuchen, ob eine krumme Linie, deren Gleichung gegeben ist, irgendwo die gerade, auf die man sie in der Gleichung bezieht, außer ihrem Anfange erreiche oder durchschneide.

a. Mache $y = o$, das ist: setze eine Nulle anstatt y in der Gleichung, und nach dieser gemachten Veränderung erforsche den Werth von x: findest du auch jetzt noch einen Werth von x, so ist dieser die Abscisse, an deren Ende die krumme Linie sich mit ihr vereiniget, und die Abscissenlinie durchschneidet, oder wenigst sie erreichet; kömmt aber von x kein Werth heraus, so wird die Abscissenlinie von der krummen weder durchschnitten, noch erreichet.

z. B. Es sey gegeben die Gleichung $y^2 = ax - x^2$: setze o für y, so hast du $o = ax - x^2$: daraus folgert man $x^2 = ax$; und endlich $x = a$: also am Ende der Abscissenlinie, da nämlich die Abscisse ihr gleich ist, kömmt diese krumme Linie zur Abscissenlinie, oder durchschneidet sie, wenn diese ihr Durchmesser oder gar ihre Achse ist. Nehmen wir aber eine andere Gleichung $ax = y^2$ her, und setzen wir o für y, so bekommen wir $ax = o$, folglich $x = o$, das ist: es giebt keine Abscisse dieser krummen Linie, deren Ordinate verschwinde: folglich kann diese Linie, wenigst nachdem sie sich in ihrem Ursprunge von der Abscissenlinie entfernet hat, sich nimmer damit vereinigen.

A. §. 646. Man giebt die Gleichung einer krummen Linie, und begehrt daraus zu bestimmen, ob sie in ihrem Ursprunge sich damit vereinige.

a. Setze o anstatt x in die Gleichung, und bestimme daraus den Werth von y, wenn sich einer ergiebt, so ist diese Linie mit der Abscissenlinie in ihrem Ursprunge nicht vereiniget, sie geht von ihr nicht aus; giebt sich aber kein Werth von y, so ist die krumme Linie mit der Abscissenlinie in ihrem Ursprunge vereinigt.

z. B.

z. B. Es sey gegeben $y^2 = ax - x^2$: wenn wir $x = o$, folglich auch $x^2 = o$ machen, wird auch $ax = o$, und $ax - x^2 = o = y^2$; also auch $y = o$: diese krumme Linie also geht von der Abscissenlinie aus, und wenn diese ihr Durchmesser oder gar ihre Achse ist, durchschneidet sie selbe schon in ihrem Ursprunge, der die Scheitel dieser krummen Linie ist.

§. 647. Es sey gegeben die Gleichung einer krummen Linie, man soll auch anders ihre Eigenschaften finden. A.

1. Setze für x und y verschiedene theils völlig bestimmte, theils nur in Rucksicht auf die bekannten Größen, und einer unbekannten auf die andere gegebene Werthe: wenn du darnach daraus die Reductionen machest, werden sich verschiedene Eigenschaften für diese krumme Linie selbst zeigen. a.

2. Setze auch verschiedene theils völlig bestimmte, theils nur in Vergleichung einer mit der andern gegebene Werthe der bekannten Größen in der Gleichung; und es werden sich wieder neue Eigenschaften ergeben, sonderlich, wenn man die Gleichung nach gemachter Reduction mit den Gleichungen anderer krummen Linien vergleicht.

3. Bestimme auch die Größen der geraden Linien, die sich von einem gegebenen Puncte zu einen andern ziehen lassen, und nach dem sie bestimmt sind, bediene dich derselben auch in den Gleichungen.

4. Endlich darf man nur die krumme Linie auf dem Papiere verzeichnen (§. 630.), so werden einige ihre Eigenschaften sich selbst dem Auge darstellen. z. B. Ob sie in sich selbst laufe und einen Raum einschließe oder nicht ꝛc.

§. 648. Es sey die Gleichung einer krummen Linie gegeben, man soll entdecken, ob A.

sie

sie mit einer schon vorhin bekannten die nämliche sey, oder nicht.

§. Man entdecke verschiedene ihre Eigenschaften, und sehe zu, ob sie nicht eine wesentliche Eigenschaft mit der schon bekannten gemein habe; ist dieses, so ist sie die nämliche.

z. B. Es sey uns diese Gleichung einer krummen Linie gegeben $ax - x^2 = y^2$. Nehmen wir an, es sey a die Achse, so finden wir erstlich, diese krumme Linie kehre in sich selbst zurück (§. 645. und §. 646.): da wird uns einfallen, es möchte diese Linie etwa die Zirkellinie seyn, von der wir wohl wissen, daß sie in sich selbst zurückkehre. Nun wissen wir auch, daß in dem Zirkel die Ordinate, welche in dem Mittelpuncte senkrecht auf den Durchmesser steht, nämlich der ganze Sinus, dem Halbmesser oder Strale gleich sey; so nehmen wir dann $x = \frac{1}{2}a$ an, und sehen zu, ob auch $y = \frac{1}{2}a$ werde: wenn ich $x = \frac{1}{2}a$ annehme, verändert sich die Gleichung dieser krummen Linie in diese $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 = y^2$; ziehe ich aus beyden Gliedern die Quadratwurzel (§. 148.), so bekomme ich $\frac{1}{2}a = y$. Da wird nun meine Vermuthung, daß diese krumme Linie die Peripherie des Zirkels sey, gewaltig gestärket. Ich weiß aber ferner aus der gemeinen Geometrie, es sey eine wesentliche Eigenschaft eines Zirkels, daß alle Stralen dem halben Durchmesser, oder der halben Achse gleich seyn, so erforschen wir dann nun die Größe einer Linie RM, die von der Mitte der Achse R an den äußersten Punct M einer Halbordinate hinreicht. Wir setzen also $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, $AR = a:2$, und wenn wir uns des Pytagorischen Lehrsatzes erinnern, so wird uns einfallen, daß wir die Größe der Hypothenuse MR, aus der Größe der Catheten MR und PR bestimmen können; es wird uns einfallen daß $MR^2 = PM^2 + PR^2$ sey; nun ist $PM^2 = y^2$, $PR^2 = (\frac{1}{2}a - x)^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$; also RM^2 oder $PM^2 + PR^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$; und wenn wir uns auch die Gleichung unserer krummen Linie $ax^2 - x^2 = y^2$ vor Augen legen, so sehen wir wohl, daß daraus $-ax + x^2 = -y^2$ fließe (§. 144.), und wir in der vorigen $-y^2$ anstatt $-ax + x^2$ setzen können, sie sieht alsdann also aus.

RM^2

$RM^2 = y^2 \frac{1}{4} a^2 - y^2$;
folglich $RM^2 = \frac{1}{4} a^2$,
und $RM = \frac{1}{2} a$.

Da wir also sehen, daß diese krumme Linie diese wesentliche Eigenschaft der Zirkellinie habe, so ist es endlich völlig entdecket, daß sie die Gleichung der Zirkellinie sey; denn sonst hätte eine wesentliche Eigenschaft dieser Linie daraus nicht können hergeleitet werden.

II. Von der Parabel.

§. 649. Wenn ein Kegel EBD mit einer der E. Seite EB parallelen Fläche durchschnitten wird, so F.87 heißt dieser Durchschnitt eine Parabel.

§. 650. In der Parabel verhalten sich die L. Quadrate der Halbordinaten gegeneinander wie die dazu gehörigen Abscissen.

Es sey AP die Achse des Durchschnittes, und B. bmdn ein zirkulärer mit der Grundfläche BMDN paralleler Durchschnitt (§550) in P, wo der Durchmesser bd durchgeht, nennen wir nun die Abscissen $Ap = x$, und $AP = X$; und die Halbordinaten $pm = y$ und $PM = Y$: weil bmd und BMD halbe Zirkel sind, auf derer Durchmessern bd und BD die Halbordinaten pm und PM senkrecht stehen

I.

so haben wir $y^2 = pm^2 = pd \times pb$
und $Y^2 = PM^2 = PD \times PB$ (§. 455.)

folglich $y^2 : Y^2 = pm^2 : PM^2$
$= pd \times pb : PD \times PB$ (§. 51.)
$= pd : PD$ (§. 182.).

Denn weil die Linien bp und BP, im gleichen bB und pP miteinander parallel sind, ist bpPBb ein Parallelo-

gramm

gramm (§. 421.), und die entgegengesetzten Seiten $pb = PB$ (§. 423.).

II.

In den Dreyecken Apd und APD ist

$$pd : PD = Ap : AP \text{ (§. 401.)}$$
$$x : X$$

nun ist auch $pd : PD = y^2 : Y^2$ (I.)

also $y^2 : Y^2 = x : X$

das ist: es verhalten sich in der Parabel die Quadrate der Halbordinaten gegeneinander wie die ihnen zugehörigen Abscissen.

E. §. 651. Die dritte Proportionallinie nach der Abscisse und Halbordinate in der Parabel heißt man ihren **Parameter**.

Z. §. 652. Folglich wenn man den Parameter a heißt, so ist $x : y = y : a$

also $ax = y^2$ (§. 175.).

Und dieses ist die Gleichung der Parabel in Rucksicht auf den Parameter, der eine beständige Größe seyn muß: denn a ist $= y^2 : x$ (§. 185.), und dieses Verhältniß ist eine beständige Größe, weil man x für eine gewisse gegebene Abscisse, und y für die dazugehörige Halbordinate in einer bestimmten Parabel kann gelten lassen.

B. §. 653. Aus der Gleichung $ax = y^2$ folget $x = y^2 : a$, und $y = \sqrt{(ax)}$: wenn also der Parameter a gegeben ist, so läßt sich zu jeder Abscisse x ihre gehörige Halbordinate berechnen: nämlich man multipliciere die gegebene Abscisse x mit dem Parameter a, so hat man ax, und wenn man aus diesem Producte die Quadratwurzel ausziehet, so ist eben diese die zur gegebnen Abscisse gehörige Halbordinate.

z. B. Es sey schon vorhin bekannt, daß der Parameter der Parabel, die eine Stuckkugel, wenn die Direction des Stuckes horizontal ist, beschreibet, 24000 Schuhe betrage (wir setzen, die Kugel mache eine vollkommene Parabel, und sie falle durch ihre Schwere in Zeit einer Secunde 15 Schuhe): wollen wir nun die zu dieser Abscisse = 15′ gehörige Halbordinate finden, so multiplicieren wir 2400 mit 15, und aus dem Producte 360000 ziehen wir die Quadratwurzel 600; so ist eben diese die Halbordinate, oder Entfernung der Kugel von der Achse der Parabel, die sie in ihrem Laufe innerhalb einer Secunde erreichet.

§. 654. Weil $a = y^2 : x$ der Parameter ist, so suche, wenn dir eine Abscisse und dazugehörige Semiordinate gegeben ist, dieser ihr Quadrat, und dividiere es darnach mit der gegebenen Abscisse, so giebt der Quotient den gesuchten Parameter. Z.

z. B. Es sey schon vorhin bekannt, daß eine Stuckkugel als ein schwerer Körper in der Zeit einer Secunde 15 Schuhe tief senkrecht falle, und wenn das Stuck stark geladen ist, in dieser Zeit nach horizontaler Bewegung 600 Schuhe weit laufe, daß also die Abscisse der Parabel, die sie beschreibt, 15′, und die Halbordinate 600′ sey; so suche man das Quadrat von 600, welches 360000 zu seyn gefunden wird; dieses dividiere mit 15, so ist der Quotient oder Parameter = 24000.

§. 655. Der Punct in der Achse, da die Ordinate durchgeht, welche dem Parameter gleich ist, oder von dem die Halbordinate ausgeht, die dem halben Parameter gleich ist, heißt der Brennpunct (Focus). E.

§. 656. Warum man diesen Punct den Brennpunct nennt, werden wir im folgenden (§. 668.) inne werden.

§. 657. Der Brennpunct ist von der Scheitel der Parabel den vierten Theil des Parameters entfernet. L.

Denn

B. Denn in dem Focus ist $y = a : 2$
also $y^2 = a^2 : 4$
wenn man nun diesen Werth $a^2 : 4$ in der Gleichung der Parabel in die Stelle von y^2 setzet, so
wird aus $x = y^2 : a$ (§. 653.)
$x = (a^2 : 4) : a = a : 4$
das ist: die Abscisse, die sich in dem Brennpuncte endiget, muß den vierten Theil des Parameters ausmachen: und also der Brennpunct diese Entfernung von der Scheitel der Parabel haben.

B. §. 658. Folglich verhält sich die Abscisse zur Ordinate, welche durch den Brennpunct geht, wie 1 : 4, und zur Halbordinate wie 1 : 2; der Parameter aber ist viermal so groß als die Entfernung des Brennpunctes von der Scheitel der Parabel.

§. 659. Man macht von Gypse vergoldete parabolische Hohlspiegel, derer hohle Oberfläche von einem parabolischen Bogen AM, wenn man ihn um die Achse AF umdreht, beschrieben wird, also daß die Weite dieser
F.88 Spiegel der Parameter MM, oder 2FM und die Tiefe AF die Entfernung des Brennpunctes von dem Scheitelpuncte sey. Nun zu Verfertigung, und auch zur Prüfung der Gestalt dieser Spiegel hat man eine Form, das ist, einen parabolischen Abschnitt MAMFA, oder wenigst den halben Theil davon AFM nöthig: diesen leichter zu verfertigen dienet folgende Tabelle, welche für jede Abscisse, so viel man ihrer nöthig hat, die eintreffende Halbordinate bis zum Brennpuncte, oder vielmehr die den Halbordinaten zugehörige Abscissen in Tausendtheilchen des Halbparameters darstellt.

Halbord.	50.	100.	150.	200.	250.	300.	350.	400.	450.	500.
Abscissen	1.	5.	11.	20.	31.	45.	62.	80.	101.	125.
Halbord.	550.	600.	650.	700.	750.	800.	850.	900.	950.	1000.
Abscissen	157.	180.	211.	245.	281.	320.	361.	405.	451.	500.

Dieser Tabelle wird man sich nun also bedienen: spanne ein etwas starkes Papier auf eine ebene Tafel aus, und bereite dir einen Maaßstab oder eine Scale die = AB = FM und in 1000 Theile getheilt sey. a. Aus dieser

Scale

Scale übersetze auf die Linie AB nach der Tabelle alle Halbordinaten, nämlich 50, 100, 150 ꝛc. von A gen B, wenn man keine auslassen will zwanzig an der Zahl. 3. Von den Puncten m, m ꝛc. aus, da sich die jetzt auf AB bemerkten Längen der Ordinaten endigen, zieh eben so viele Linien mn mit AF parallel, oder auf AB senkrecht; und auf diesen Linien bemerke die Länge der für jede Halbordinate gehörigen Abscisse nach der Tabelle, z. B. für die Halbordinate 200, die Abscisse 20. Man bekömmt also eben so viele Puncte n, n ꝛc. als man Puncte m, m ꝛc. auf der Linie AB bemerket hat, nämlich 20 (den letzten M mitgezählt), wenn keine übersprungen werden. 4. Durch diese Puncte zieht man alsdann mit freyer Hand eine krumme Linie, das ist, den parabolischen Bogen A n n ꝛc. M, entweder mit einer Feder, oder einem Reißbleye: und eben so wird auf der linken Seite der Linie AF ein diesem völlig ähnlicher und gleicher Bogen beschrieben, wenn man den parabolischen Abschnitt ganz haben will. Nach dieser papierenen Form kann man sich alsdenn eine hölzerne von dürrem Holze oder eine eiserne vom Bleche, wenn man die papierene ausschneidet, und darauf legt, machen lassen.

§. 660. Für größere parabolische Bogen, die nämlich über den Parameter hinaus sich erstrecken, mag noch für die nachkommenden Halbordinaten, und dazugehörigen Abscissen folgende Tabelle nach dem Parameter = 1000 Theilchen dienen.

Halbordinaten	1700.	1300.	1400.	1500.	2000.	2300.	2600.
Abscissen	720.	845.	980.	1125.	2000.	2645:	3380.
Halbordinaten	2900.	3200.	3500.	4000.			
Abscissen	4205.	5120.	6125.				

Man bilde sich aber nicht ein, daß man eine ganze Parabel beschreiben könne: denn sie hat kein Ende; ihre Aerme gehen beyderseits unendlich fort, und entfernen sich immer weiter von der Achse. Man kann aber jeder Abscisse, sie mag so lang seyn, als sie will, eine ihr gehörige Halbordinate finden, die auch desto länger seyn wird, je länger jene ist. Das aber wird man wohl bemerken, daß sich die parabolischen Bogen immer weniger krümmen, je weiter sie sich von der Scheitel entfernen.

§. 661.

A. §. 661. Eine Parabel von gegebnem Parameter geometrisch mit dem Handzirkel zu beschreiben, und den Brennpunct darinnen zu bestimmen.

a. 1. Zieh zwo gerade Linien BP (deren ein Theil
F.89 BA dem Parameter gleich sey), und nN von unbestimmter Länge rechtwinklicht übereinander.

2. Beschreibe Zirkel, soviel du willst, die alle durch den Punct B durchgehen, und ihren Mittelpunct in der Linie BP haben. Setze nämlich immer einen Fuß deines Handzirkels in einen beliebigen Punct der Linie BP, und eröfne ihn, bis der andere Fuß in B reicht, und beschreib damit je einen Zirkel nach dem andern, doch muß BP nicht kleiner als $\frac{1}{2}$ AB seyn.

3. Zieh durch P, P′, P″ mit der Linie nN parallellinien, und mache PM = AN, PM′ = AN′, PM″ = AN″ ꝛc. so werden die Puncte M, M′, M″ ꝛc. in der Parabel seyn, die man alsdann durch sie mit freyer Hand zieht.

4. Theile die Linie BA in 4 gleiche Theile, und einen solchen Theil weit unter A wird der Brennpunct seyn (§. 657.).

B. Wir haben nur zu erweisen, daß die Puncte M, M′, M″ ꝛc. in der Parabel seyn.

Es ist bey allen $BA : AN = AN : AP$ (§. 455.)

also AN^2 oder $PM^2 = BA \times AP$

nämlich $y^2 = a \times x$

also sind alle diese Puncte in der Parabel (§. 652.).

L. §. 662. Eine jede gerade Linie *FM*, die man
F.91 aus dem Brennpuncte *F* an das Ende einer Halbordinate zieht, und den Brennstral oder

Füh-

Führungstral (*radius foci* oder *radius vector*) nennt, ist gleich der Summe aus der dazugehörigen Abscisse und der Entfernung des Brennpunctes von der Scheitel der Parabel.

Denn es sey $AP = x$, $PM = y$, Parameter $= a$; so ist $AF = \frac{1}{4}a$, $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$

also $FP^2 = (x - \frac{1}{4}a)^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

und $FM^2 = FP^2 + PM^2$ (§. 394.)

$= x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 + y^2$ setze ax für y^2 (§. 652.)

$FM^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 + ax$ (§. 184.)

$= x^2 + \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax$ oder $x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

also $FM = a\sqrt{(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2)} = x + \frac{1}{4}a$ (§. 109.).

§. 663. Man kann also eine Parabel mechanisch in einem fort auf folgende Weise beschreiben. T. 90

1. Man mache ein Linial CD auf einer mit a. Papiere überzognen ebenen Tafel fest, und lege ein Winkelmaaß GE mit einem Arme EG daran, das man hin und wieder schieben kann.

2. Wenn A die Scheitel der Parabel seyn soll, so mache man $AF = AB$, und BF dem halben Parameter gleich, so ist $AF = \frac{1}{4}$ des Parameters, und F der Brennpunct. Man schlägt nun in F eine Nadel ein, daran ein dünner Faden von der Länge BX mit einem seinem Ende angebunden sey; mit dem andern Ende wird er zu unterst in H an dem Arm EH des Winkelmaaßes GEH befestiget: es fällt aber der Punct H in den Punct X, wenn man den Arm EH an BX hinrückt.

3. Wenn man alsdann eine umgekehrte Glufe M an den Faden und den Arm EH andrückt, daß sie den Faden FMH beständig spannt, und dieser auf dem Kopfe der Glufe ruht, und sie ein wenig an das Papier andrückt, und mit dem Winkelmaaße von B gen D hinüber rückt, so beschreibt der Glufenkopf die parabolische Linie AM, und drückt sie auch in das Papier ein, daß man sie darnach mit einer Schreibfeder überfahren kann. Man kann auch anstatt der Glufe eine umgekehrte Nadel nehmen, und den Faden durch das Oehr gehen lassen.

4. Wenn man das Winkelmaaß umkehrt, kann man eben so damit auf der linken Seite den andern Arm der Parabel beschreiben.

B. Denn es ist hier immer $FM = EH - HM = XB - PX = PB = PA + AB = x + \frac{1}{4}a$, und also jeder Punct M in der Parabel.

Z. §. 664. Weil immer $EM = HE - HM = FM$ ist, so sieht man wohl, daß jeder Punct der Parabel *M* von der Richtungslinie *CD*, die von dem Brennpuncte *F* einen halben Parameter entfernet, und auf die Achse *BX* senkrecht ist, eben so weit als von dem Brennpuncte *F* entfernet sey.

II. Fall

§. 665. An einen in der Parabel gegebenen Punct *M* eine Tangente ziehen.

a. 1. Bestimme zuerst den Brennpunct der gegebnen Parabel (§. 657.), und zieh durch M die Linie DM mit der Achse AP parallel, und mache sie dem Brennstrale FM gleich.

2. Von D zieh auf F die gerade Linie DF zu, und schneid sie in c in zweene gleiche Theile.

3. Durch M und c zieh eine gerade Linie MT; diese, sage ich, ist die Tangente an dem Puncte M.

Denn der Punct M, wie wir setzen, ist wirk- V.
lich in der Parabel: wenn ich nun erweise, daß in dieser Linie MT kein anderer Punct mehr weder unter M als m, weder ober M als n in der Parabel sey, so muß nothwendig MT eine Tangente der Pnrabel seyn (§. 472.). Nun

I.

Es ist $DM = MF$, $Dc = cF$, $cM = cM$

$\triangle DMc = \triangle FMc$, und $DcM = FcM$

II.

$Dc = cF$, $cn = cn$
$DcM = FcM$ (I.)

also $\triangle Dcn = \triangle Fcn$, und $\triangle Dcm = \triangle Fcm$.

$Dn = Fn$, und $Dm = Fm$

III.

Ziehen wir nun die Richtungslinie DB auf BR (§. 664.), und mE und ne auf DB senkrecht

so ist 1. $mED = 90^\circ$ 2. $Den = 90^\circ$. 3. $Em = mF$ und $en = nF$
also $Dm > mE$ (§397) $Dn > ne$ wenn die Puncte m
$Dm = mF$ $Dn = nF$ (II) und n in der Para-
folglich $mF > mE$ $nF > ne$ bel sind (§. 664.).

Da es dann unmöglich ist,

daß $mF > mE$, und zugleich $Em = mF$
oder $nF > ne$, und zugleich $en = nF$

sey, so können die Puncte m und n nicht in der Parabel, sondern sie müssen außer ihr seyn; und also berühret die Linie TM die Parabel in dem einzigen Puncte M, und ist ihre Tangente.

Z. §. 666. Mit der Tangente MT hat man auch die Subtangente PT; und wenn man in M auf die Tangente MT eine Perpendicularlinie MR zieht, so ergiebt sich auch die Subnormallinie PR.

Z. §. 667. Verlängern wir die Linie DM in S,

so ist SMm = Dmc (§. 313.)
Nun ist cMF = Dmc (§. 340.)
also SMm = cMF (§. 43.)
mMR = Rmc (§. 301.)
folglich SMR = FMR (§. 47.).

§. 668. Es müssen also alle Lichtstralen, welche in einen paraboliſchen Spiegel mit der Achse parallel einfallen, sich in dem Brennpuncte versammeln; denn die Erfahrung lehrt es uns, und in der Physik wird es erwiesen daß der Einfallswinkel allezeit dem Reflexionswinkel gleich sey. Daher müssen die Stralen eines Lichtes, das man in den Brennpunct eines paraboliſchen Spiegels setzet, von dem Spiegel mit der Achse parallel zurückgeprellet werden, und so kann man damit einen weit entfernten Ort beleuchten; und wenn diese Stralen mit einem andern paraboliſchen Spiegel, der dem ersten gerad entgegen steht, aufgefangen werden, so werden sie von ihm wieder in dem Brennpuncte versammelt. Wenn man also in den Brennpunct eines dieser zwo Spiegeln glühende Kohlen, in den Brennpunct des andern aber einen leicht brinnenden Zunder setzet, wird dieser davon angezündet, und darum heißt man diesen Punct den Brennpunct, dieweil die mit der Achse parallele Stralen in diesem Punete versammelt brennen.

§. 669. Es läßt sich auch aber etwas schwerer erweisen, daß der Krümmungsstral für den Zirkel, der die Parabel in ihrer Scheitel berührt, dem halben Parameter gleich sey. Darum kann auch ein nicht gar zu großes Stück eines sphäriſchen Hohlspiegels die Stelle eines paraboliſchen vertretten, und kann man damit die Sonnenstralen oder andere, wenn sie mit der Achse des Spiegels parallel einfallen, in der Weite des halben Stroles eines solchen Spiegels versammeln, und so mahlen sie das

Bild

Bild von weit entfernten Gegenständen in den Spiegeltelescopen ab.

III. Von der Hyperbel.

§. 670. Wenn man einen Kegel mit einer E. ebenen Fläche NAM, die mit der Seite des Ke- F. 92 gels BC, so man sie verlängert, ober der Spitze des Kegels E, einen Winkel in C macht, durchschneidet; so heißt man diesen Durchschnitt NnAmM PN eine Hyperbel, und die Linie CA heißt ihre Querachse (axis transversus).

§. 671. Die Verhältniß der Halbordinaten A. gegeneinander in der Hyperbel zu bestimmen.

Die Querachse CA nennen wir a, Ap sey B. $= x$, $AP = X$, $pm = y$, $PM = Y$. Nun setzen wir, der Durchschnitt bmdnb sey mit der Grundfläche BMDNB parallel, so ist jene, wie diese ein Zirkel (§. 548. §. 550.), derer Durchmesser bd und BD sind, darauf pm und PM senkrecht stehen folglich

$pm^2 = bp \times pd$ und $PM^2 = BP \times PD$ (§. 455.)

also $pm^2 : PM^2 = (bp \times pd) : (BP \times PD)$ (§. 51.).

II.

Weil bp mit BP parallel ist, so ist

in dem $\triangle BCP$ $bp : BP = Cp : CP$
in dem $\triangle PAD$ $pd : PD = Ap : AP$ } (§. 401.)

folglich $(bp \times pd) : (BP \times PD) = (Cp \times Ap) : (CP \times AP)$ (§. 181. 3.)

$(bp \times pd) : (BP \times PD) = pm^2 : PM^2$ (I)

also $pm^2 : PM^2 = (Cp \times Ap) : (CP \times AP)$ (§. 43.)

$y^2 : Y^2 = x \times (a+x) : X \times (a+X)$
$= (ax+x^2) : (aX+X^2)$

und $y : Y = \sqrt{(ax+x^2)} : \sqrt{(aX+X^2)}$ (§. 180. 4)

a. Das ist: die Halbordinaten der Hyperbel verhalten sich gegeneinander wie die Quadratwurzeln der Parallelogramme, derer Höhen ihre Abscissen x und X, und die Grundlinien $a+x$ und $a+X$ die Summen aus der Querachse a, und ihren Abscissen x und X sind.

B. §. 672. Weil $y^2 : Y^2 = (ax+x^2) : (aX+X^2)$
so ist auch $y^2 : (ax+x^2) = Y^2 : (aX+X^2)$
$= b : a$

denn wenn Y in einer gegebnen Hyperbel eine gewisse Halbordinate bedeutet, so hat sie auch eine gewisse dazugehörige Abscisse, und die Querachse a bleibt für sich selbst unverändert, folglich sind Y^2 und $ax+X$ in selber Hyperbel unveränderliche Grösßen, und kann ihre Verhältniß zueinander durch $a:b$ ausgedrückt werden.
Nun aus der Verhältniß $y^2 : (ax+x^2) = b : a$
folget $ay^2 = abx+bx^2$
welches die Gleichung der Hyperbel auf ihre Achse ist, darinnen eine der unveränderlichen Grösßen die Querachse, die andere den Parameter bedeutet.

Z. §. 673. Weil die Buchstaben a und b was immer für bekannte Grösßen andeuten können, so ist es gleichgültig, welcher von beyden für die Querachse, und welcher für den Parameter gelten soll.

Z. §. 674. Weil weder a durch b, noch b durch a bestimmt wird, so bedeutet $a:b$ keine gewisse, sondern jede erdenkliche Verhältniß; woraus man also wohl sieht, daß nicht alle Hyperbeln einander ähnlich oder von einer Art seyn, sondern daß es ihrer unendlich viele Arten giebt, durch eine bestimmte Verhältniß aber $a:b$ z. B. $2:3$ sey auch die Art einer Hyperbel bestimmt, und alle Hyperbeln seyn einander ähnlich,

lich, bey denen die Verhältniß des Parameters zur Querachse oder $a : b$ die nämliche; unähnlich aber die, bey denen sie verschieden ist.

§. 675. Wenn a in Rucksicht auf b unendlich ist, so verschwindt im zweyten Gliede der Gleichung $abx + bx^2$ der letzte Theil bx^2 (§. 233.), also aus $ay^2 = abx + x^2$ wird $ay^2 = abx$ oder $y^2 = bx$, welche Gleichung, wenn b den Parameter bedeutet, den wir oben §. 652. durch a ausgedrückt haben, die Gleichung der Parabel ist. 3.

§. 676. Folglich kann man die Parabel als eine Art von einer Hyperbel betrachten, bey der die Querachse in Vergleich des Parameters unendlich ist; und weil die Parabeln nur diese einzige Art der Hyperbeln ausmachen, so sind alle Parabeln einander ähnlich (§. 674.). 3.

§. 677. Und je weiter die Querachse den Parameter an Länge übertrift, je näher kömmt eine Hyperbel zur Parabel; je näher der Parameter und die Querachse zur Gleichheit kommen, je mehr ist die Hyperbel von der Parabel unterschieden. 3.

§. 678. Man darf sich aber nicht verwundern, daß aus der Hyperbel eine Parabel wird, wenn die Querachse in Rucksicht auf den Parameter unendlich ist, denn wenn der Parameter nicht unendlich ist, so muß er in einen endlichen Kegel fallen, und an einem Orte z. B. bey nm mit der Grundfläche des Kegels parallel durchgehen: aber die unendliche Querachse AC wird mit der verlängerten Seite des Kegels BC erst in einer unendlichen Entfernung von seiner Scheitel E in C vereiniget; da dann also der Winkel BCP völlig verschwindet, wird CB mit CP, und also auch die Fläche NAM, welche CP mitten durchschneidet, mit CP parallel, in welchem Falle dann der Durchschnitt des Kegels NAM eine Parabel ist (§. 630.).

§. 673.

Z. §. 679. Aus der Gleichung der Hyperbel $ay^2 = abx + bx^2$ folget $y^2 = (abx + bx^2) : a$, und also $y = \sqrt{(abx + bx^2) : a}$; und $x : y = y : b + (bx : a)$. Wenn also die Querachse a und der Parameter b gegeben sind, kann man jeder Abscisse, ihre respondierende Halbordinate durch Rechnung finden (§. 177.): und wenn man für mehrere Abscissen von willkühriger Größe ihre Halbordinaten gefunden hat, kann man auch leicht die Hyperbel durch die äußersten Puncte derselben beschreiben (§. 360.).

E. §. 680. Die mittlere Proportionallinie zwischen der Querachse, und dem Parameter der Hyperbel heißt man die **conjungierte Achse** (axis conjungatus) der Hyperbel.

Z. §. 681. Also wenn der Parameter $= b$, die Querachse $= a$, die conjungierte $= d$ ist,

so ist $a : d = d : b$,

folglich $d^2 = ab$ (§. 175.)

und $d = \sqrt{(ab}$

folglich $\frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)} = \sqrt{(\frac{1}{4} ab)}$

also ist das Quadrat der conjungierten Achse $= \frac{1}{4} ab$.

E. §. 682. Wenn man die Achse der Hyperbel PA über ihre Scheitel A verlängert, und AC der
F.93 halben Querachse gleich macht, so heißt der Punct C das **Centrum** oder der **Mittelpunct** der Hyperbel.

L. §. 683. **Entlehnter Satz.** Wenn zwo Wurzeln durch Addierung einer gegebenen Größe gleichviel wachsen, wird dadurch die Differenz ihrer Quadraten mehr als diese Wurzeln zunehmen.

Es sey eine Wurzel = a, die andere = a+b; §.
so ist dieser Quadrat = a^2, der andern $a^2+2ab+b^2$;
die Differenz der Wurzeln = b, der Quadraten $2ab+b^2$.
Nun vermehren wir beyde Wurzeln um die Größe c
so ist

die erste a + c	die zweyte a + b + c
ihr Quad. $a^2+2ac+c^2$	ihr Quad. $a^2+b^2+c^2+2ab$ $+2ac+2bc$

die Differenz dieser Quadraten $b^2 + 2ab + 2bc$.
zuvor war die Differenz der Quadraten $2ab + b^2$, jetzt ist sie um 2bc größer geworden als sie zuvor war, die Wurzeln aber haben nur um c zugenommen, also ist die Differenz der Quadraten mehr als die Wurzeln durch Addierung der Größe c gewachsen.

§. 684. Die Wahrheit dieses Satzes in einem besondern Beyspiele zu zeigen, setzen wir, es seyn zwo Wurzeln gegeben, nämlich 1 und 2, so sind ihre Quadrate 1 und 4, und der Unterschied derselben 3: addieren wir nun zu beyden Wurzeln 2, so ist die erste 3, die andere 4, und das Quadrat der ersten 9, der andern 16, die Differenz dieser Quadraten aber 7: ist also der Unterschied der Quadraten der zuvor nur 3 war, um 4 gewachsen, die Wurzel aber ohne Aenderung ihres Unterschiedes nur um 2.

§. 685. Wenn also die Differenz zwischen §.
a^2 und b^2 (z. B. 16 — 1), wieder zwischen c^2 und d^2 (64 — 49) die nämliche (15) ist, und die letztern Quadrate größer als die erstern sind, so muß der Unterschied der Wurzeln zwischen c und d (8 — 7) kleiner seyn, als der Unterschied der Wurzeln zwischen a und b (4 — 1). Denn wenn dieser der nämliche, oder gar noch größer wäre, so wäre der Unterschied der letztern Quadrate größer als der erstern.

§. 686.

§. 686. Wenn man durch die Scheitel
§. 93 der Hyperbel *A* die conjungierte Achse *DE* auf die Hauptachse *AP* senkrecht und also zieht, daß diese auf die Mitte jener falle, daß nämlich $AD = AE$ sey, und aus dem Mittelpuncte der Hyperbel *C* durch *D* und *E* gerade Linien *CR* und *Cr* zieht, so werden diese, je weiter man sie auszieht, je näher immer zu den Aermen der Hyperbel *AM* und *Am* hinkommen, aber doch sie niemal völlig berühren.

B. Mm oder Rr geht senkrecht durch PA oder PC (§638)
DE setzen wir gehe auch senkrecht durch selbe

---

also ist Rr parallel mit DE (§. 366.)
folglich ist $CA : AD = (CP = CA + AD) : PR$
$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}b} = \frac{1}{2}a + x : PR$
(§682) (§681)

---

also $CA^2 : AD^2 = CP^2 : PR^2$
(§. 180. 3.)
$\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}ab = (\frac{1}{4}a^2 + ax + x^2) : PR^2$
(mit $\frac{1}{4}a$ div.) $a : b =$

---

folglich $PR^2 = \frac{1}{4}a^2b + abx + bx^2$ (§. 185.)

$$PM^2 = \frac{abx + bx^2}{a}$$ (§. 679.)

---

also $$PR^2 - PM^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2b}{a} = \frac{1}{4}ab$$ (§. 47.)

$$AD^2 = \frac{\frac{1}{4}ab}{a}$$ (§. 681.)

---

also $AD^2 = PR^2 - PM^2$ (§. 43.)

folglich bleibt der Unterschied der Quadrate von PR und von PM immer der nämliche, das ist, immer $= AD^2$, je größer also diese Quadrate folglich je größer PR und PM werden, je kleiner

wird

wird der Unterschied ihrer Wurzeln PR — PM oder RM (§. 685.), also kömmt der Arm AM immer näher zu CR, je weiter er fortgeht. Weil aber doch der Unterschied von $PR^2 - PM^2$ folglich auch PR — PM, das ist, RM nie völlig verschwindet, erreicht er diese Linie doch niemal, und so ist es auch auf der andern Seite.

§. 687. Man heißt diese Linien CR und Cr die Asymptoten der Hyperbel, das ist, die niemal in sie fallende. Ich mußte die Möglichkeit solcher Linien zeigen, weil sich ihrer viele von den neuern Philosophen bey Erklärung der Gesetze der Kräfte bedienen. Es wäre noch von verschiednen Eigenschaften der Hyperbel zu reden übrig, derer sie viele einigermassen, doch mit gewissem Unterschiede mit der Elipse gemein hat; weil sie aber eben in der Philosophie nicht gar nothwendig für diz Anfänger sind, übergehen wir sie Kürze halber.

IV. Die Ellipse.

§. 688. Wenn man einen Kegel mit einer ebenen Fläche AmMaNa durchschneidet, daß der Durchschnitt beyderseits durch die Seiten des Kegels geht, oder die Achse des Durchschnittes unten bey ihrem Ausgange a mit der Seite aE, einen gegen den Gipfel des Kegels E schauenden spitzigen Winkel macht, so heißt man einen solchen Durchschnitt eine Ellipse. E. F. 94

§. 689. Die Verhältniß der Halbordinaten gegeneinander in der Ellipse zu finden.

Machen wir durch den Kegel, und durch die Ellipse (AmMaNnA), deren Achse Aa = a sey, B. zweene mit der Grundfläche desselben parallele Durchschnitte dnbmd und DNBMD, welche Zirkel

kel, und dieser ihre Durchmesser db und DB seyn werden, darauf die Halbordinaten $Pm = y$ und $PM = Y$ senkrecht stehen.

Nun ist $pm^2 = pd \times pb$ und $PM^2 = PD \times PB$ (§.455.)

folglich $pm^2 : PM^2 = (pd \times pb) : (PD \times PB)$ (§.51.)

II.

Weil db mit DB parallel ist, so ist

in dem $\triangle APB$ $bp : Ap = BP : AP$
in dem $\triangle apd$ $pd : ap = PD : aP$ } (§. 401.)

folglich $(bp \times pd) : (Ap \times ap) = (BP \times PD) : (AP \times aP)$ (§. 181. 3.)

und $(bp \times pd) : (BP \times PD) = (Ap \times ap) : (AP \times aP)$ (§. 178.)

$(bp \times pd) : (BP \times PD) = pm^2 : PM^2$ (I)

also $pm^2 : PM^2 = (Ap \times ap) : (AP \times aP)$ (§.43.)

$y^2 : Y^2 = x \times (a - x) : X \times (a - X)$
$= (ax - x^2) : (aX - X^2)$

und $y : Y = \sqrt{(ax - x^2)} : \sqrt{(aX - X^2)}$ (§180. 4)

das ist: die Quadrate der Halbordinaten in der Ellipse verhalten sich gegeneinander wie die Producte der Parallelogramme aus den correspondierenden Theilen der Achse; die Halbordinaten selbst aber verhalten sich gegeneinander, wie die Quadratwurzeln dieser Parallelogramme oder Producte.

B. §. 690. Aus $y^2 : Y^2 = (ax - x^2) : (aX - X^2)$
bekommen wir $y^2 : (ax - x^2) = Y^2 : (aX - X^2)$
(§. 178.).

In der das zweyte Glied $Y^2 : (aX - X^2)$, wenn man Y für eine gewisse bestimmte Halbordinate und X für die ihr zugehörige Abscisse gelten läßt, aus zweyen unveränderlichen Größen besteht, die man b und a heißen kann: es sey also

$Y^2 :$

$Y^2 : (aX - X^2) = b : a$ so haben wir

$$y^2 : (ax - x^2) = b : a$$

folglich $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 175.). Dieses nun ist die Gleichung der Ellipse in Rucksicht auf ihre Achse. In dieser Gleichung bedeutet ein Buchstab im zweyten Gliede a oder b die Achse, der andere den Parameter.

§. 691. Wenn wir diese Gleichung $ay^2 = abx - bx^2$ gegen die Gleichung der Parabel $ay^2 = abx + bx^2$ halten, so sehen wir daß sie nur in dem + und − in den Theilen des zweyten Gliedes unterschieden seyn, die Ellipse nämlich hat −, die Hyperbel aber +.

§. 692. Da der Werth der Buchstaben a und b unbestimmt ist, so drückt a : b alle erdenkliche Verhältnisse der Achse zum Parameter aus. Darum giebt es unendlich viele Arten von Ellipsen, derer nur die einander ähnlich sind, bey denen die Verhältniß der Hauptachse zum Parameter die nämliche ist, z. B. 1 : 2, bey denen sie aber verschieden ist, als 1 : 2, und 1 : 3, die sind auch von verschiedener Art.

§. 693. Wann $a = b$ ist so verwandelt sich die allgemeine Gleichung der Ellipse in diese $(ay^2 = a^2x - ax^2) = (y^2 = ax - x^2)$ welche die Gleichung des Zirkels ist (§. 648.). Es ist also der Zirkel gleichsam eine Art einer Ellipse, in der der Parameter der Achse gleich ist.

§. 694. Wenn a gegen b unendlich ist, so verschwindet bx^2 in der allgemeinen Gleichung der Ellipse $ay^2 = abx$ oder $y^2 = bx$: dieß ist die Gleichung der Parabel, wenn b den Parameter bedeutet (§. 652.); folglich kann die Parabel für eine Art der Ellipse gehalten werden, oder besser für den obersten Theil einer Ellipse, deren Achse gegen den Parameter unendlich groß ist.

§. 695.

B. §. 695. Also haben wir in der Gleichung der Ellipse auch die Gleichung des Zirkels und der Parabel enthalten, ja sogar auch die Gleichung der Hyperbel, wenn man das Zeichen + anstatt — nimmt, es ist nämlich die allgemeine Gleichung aller Kegelschnitte die $ay^2 = abx \pm bx^2$.

B. §. 696. Aus der Gleichung der Ellipse $ay^2 = abx - bx^2$ ergiebt sich $y^2 = bx - (bx^2 : a)$, das ist: das Quadrat der Halbordinate in der Ellipse ist gleich dem Unterschied zwischen dem Producte aus der ihr respondierenden Abscisse in den Parameter $= bx$, und dem Producte $(bx^2 : a)$ aus der nämlichen Abscisse (x) in die vierte Proportionalzahl $(bx : a)$ zur Achse (a), dem Parameter (b) und der Abscisse (x); denn es ist $a : b = x : (bx : a)$ (§. 185.), und $(bx : a) \times x = bx^2 : a$.

B. §. 697. Also sehen wir jetzt, wie für jede gegebene Abscisse, wenn auch zugleich die Achse und der Parameter gegeben sind, ihre respondierende Halbordinate zu finden sey. Nämlich man multiplicieret zuerst den Parameter (b) mit dem Quadrate der Abscisse (x^2), das Product (bx^2) dividieret man durch die Achse (a), das ist, man sucht zu a, b, und x^2 durch die Regel detri die vierte Proportionalzahl $(bx^2 : a)$: diese subtrahiert man von (bx) dem Producte aus dem Parameter in die Abscisse, und aus der Differenz zieht man die Quadratwurzel aus; so hat man $y = (bx - \frac{bx^2}{a})$.

L. §. 698. Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie.

Denn

Denn setze $x = 0$, so haben wir $abx - bx^2 = ay^2 = 0$: also auch $y = 0$; folglich vereinigt sie sich mit der Achse beym Ursprunge der Abscissen (§. 646.). Darauf setze $x = a$, so haben wir $abx - x^2b = y^2 = aab - aab = 0$: also auch am Ende der Achse vereiniget sie sich mit derselben; also, weil der rechte Arm der Ellipse wie der linke beschrieben wird (§. 638.), geht sie zweymal durch die Achse, nämlich in dieser ihrem Anfange und Ende, und also kehrt sie in sich selbst zurücke.

§. 699. Die kleine Achse, oder conjungierte E. Achse BQ der Ellipse ist die Ordinate, die mitten durch die Hauptachse oder große Achse Aa bey C durchgeht. Die große Achse haben wir bisher immer nur schlechthin die Achse genennt.

§. 700. Die kleine Achse der Ellipse ist L. die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Achse und dem Parameter.

Weil die halbe kleine Achse CB die Halbor- B. dinate für die Abscisse AC oder halbe große Achse ist, so ist $AC = x = a : 2$, folglich $x^2 = a^2 : 4$ und $ax = aa : 2$. Nun wenn wir diese Werthe in der allgemeinen Gleichung substituieren, so werden wir anstatt $ay^2 = abx - bx^2$

bekommen $ay^2 = \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{4}a^2b = \frac{1}{4}a^2b$

also $y^2 = \frac{1}{4}ab$

und $y = \sqrt{(\frac{1}{4}ab)} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$

folglich ist die ganze kleine Achse $= 2y = \sqrt{ab}$: also ist sie die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen Achse und dem Parameter: denn es ist $a : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : b$ (§. 177.).

B. §. 701. Folglich, wenn die große Achse und der Parameter gegeben sind, kann man daraus die kleine bestimmen: denn es sey die kleine Achse $= d$, so ist $a : d = d : b$, also darf man nur den Parameter (b) mit der großen Achse (a) multiplicieren, und aus dem Producte ($ab = d^2$) die Quadratwurzel ausziehen, so ist diese die kleine Achse (d).

B. §. 702. Und verkehrt, wenn die kleine Achse (d) und der Parameter (b) gegeben sind, findt man die große, wenn man das Quadrat der kleinen mit dem Parameter dividiert; oder den Parameter (b), wenn die kleine Achse und die große gegeben sind: nämlich es ist $b = d^2 : a$, das ist: man dividiert das Quadrat der kleinen Achse durch die große, so ist der Quotient der Parameter.

A. §. 703. Es seyn die Achsen einer Ellipse gegeben, man soll die Brennpuncte suchen, jene Puncte nämlich in der großen Achse, da die durchgehende Ordinate dem Parameter gleich ist.

a. 1. Eröffne den Handzirkel nach der Größe
B. der halben großen Achse CA.
F.95

2. Darnach setze einen Fuß desselben in B den äußersten Punct der kleinen Achse, mit dem andern Fuße mache zweene Bögen durch die große Achse; und die Puncte, da sie selbe durchschneiden F und f sind die Brennpuncte.

Denn in dem Brennpuncte ist $y = \frac{1}{2}b$ (§655), folglich $y^2 = \frac{1}{4}b^2$, also aus der allgemeinen Gleichung $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ erhalten wir

im

im Brennpuncte $\frac{1}{4}b^2 = bx - (bx^2) : a$ multipl. mit a

$\frac{1}{4}ab^2 = abx - bx^2$ dividier mit b

$\frac{1}{4}ab = ax - x^2$ versetzt (§. 144.)

$x^2 - ax = -\frac{1}{4}ab$ ergänzt (§. 144.)

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$ Wurzel ausgez.

$x - \frac{1}{2}a = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$ (§. 111.)

oder $\frac{1}{2}a - x$

also $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$

Der doppelte Werth von x zeigt uns, daß es in der Ellipse zweene Brennpuncte giebt. Nun, weil $BF = AC = \frac{1}{2}a$, so ist $BF^2 = \frac{1}{4}a^2$; und, weil $CB^2 = \frac{1}{4}ab$ (§. 700.), so ist

$FC^2 = BF^2 - CB^2$ (§. 396.)

$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab$

folglich $= FC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$

Es ist aber auch $fC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)}$; weil fC eben so, wie FC bestimmt wird, folglich $fC = FC$ ist.

also ist $AF = AC - FC = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$

$Af = AC + Cf = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$

Es werden also beyde Brennpuncte auf diese Weise recht bestimmt.

§. 704. Wenn die Achsen durch Zahlen gegeben sind, so kann man daraus den Parameter b berechnen (§. 702.), und aus diesen nach den hier angeführten Formeln AF und Af die Entfernung eines jeden Brennpunctes von der Scheitel der Ellipse finden. Z.

§. 705. Sind die Entfernungen der Brennpuncte von der Scheitel AF und Af gefunden, so haben wir $AF - Af = Ff$, die Entfernung ei- Z.

nes Brennpunktes von dem andern, und wenn wir sie halbieren, haben wir FC = Cf, die Entfernung der Brennpuncte von dem Mittelpuncte C, die man Excentricität heißt. Ist aber die Excentricität und große Achse gegeben, so läßt sich auch leicht die halbe kleine BC berechnen, weil FC und BF = AC = ½ a in dem rechtwinklichten Dreyecke FCB gegeben sind (§. 396.). Soll man aber die halbe kleine Achse CB nur mechanisch suchen, so eröffnet man einen Handzirkel nach der Größe der halben Achse AC, setzt ihn mit einem Fuße erstlich in F, darnach in f, und macht Bögelchen mit dem andern, die einander in B durchschneiden; und also hat man den Punct B, folglich BC die halbe kleine Achse.

E. §. 706. Wenn man aus einem Brennpuncte F oder f der Ellipse an das Ende einer Halbordinate M eine gerade Linie FM oder fM zieht, so heißt diese ein Stral der Ellipse.

§. 707. In der Astronomie heißt man sie den Führungsstral (Radius vector), weil sie einen Planeten, als wäre er an ihrem Ende M angeheftet, in der Ellipse herum führt, und zwar also, daß nach dem von Keplern der Ehre unsers Teutschlandes entdeckten Gesetze immer der Raum, den der Führungsstral durchläuft, der Zeit, in der es geschieht, proportioniert sey. Man hat von der Kenntniß der Ellipse was mehrers in der Astronomie nöthig, die die man jetziger Zeit zum Theile auch in die Physick eingeführet hat, darum müssen wir noch einige Eigenschaften dieser krummen Linie anführen, und einige Aufgaben auflösen.

A. §. 708. Es seyn die große Achse und der Parameter einer Ellipse gegeben, man soll für jede Abscisse *AP* den respondierenden Stral *FM* finden.

I. Auf

1. Suche AF die Entfernung des Brenn- a.
punctes F von der Scheitel A (§. 704.). B.

2. Subtrahiere AF von der gegebenen Ab-
scisse AP, so hast du FP.

3. Suche für die Abscisse AP ihre Halbordi-
nate MP (§. 697.).

4. Nachdem man die Catheten FP und PM
hat, läßt sich die Hypothenuse FM leicht berech-
nen (§. 396.).

Wenn die Abscisse Ap kleiner ist als AF, so
zieh sie von AF ab, so hast du pF; aus pF, und
pm wird, wie zuvor, Fm bestimmt.

§. 709. Die Summe zweener Strale *FM* &
und *fm*, die man aus den zweenen Brenn- F.95
puncten *F* und *f* auf den nämlichen Punct *M*
des elliptischen Umkreises zieht, ist jederzeit
der Hauptachse *Aa* gleich.

Es sey $FC = fc = c$, und $Aa = a$, und $AP = x$; B.

so ist $AC = \frac{1}{2}a$

$PA = a - x$ und $PC = \frac{1}{2}a - x$

$PF = FC - PC = c - \frac{1}{2}a + x$

$Pf = CF + PC = c + \frac{1}{2}a - x$

folglich $PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 + 2cx$

und $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx + x^2 - ax$

$AP \times Pa = ax - x^2$

$FB^2 = AC^2$ (§. 703.) $= \frac{1}{4}a^2$

$FC^2 = c^2$

also $BC^2 = FB^2 - FC^2$ (§. 396.) $= \frac{1}{4}a^2 - c^2$

Nun ist $AC^2 : BC^2 = AP \times Pa : PM^2$ (§689)
oder $\frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - x^2 : PM^2$
mit 4 mult. $a^2 : a^2 - c^2 =$ (§. 182. 1.)
mit a^2 div. $1 : 1 - \frac{4c^2}{a^2} =$

also $PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

$PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2 - 2cx$
Summe $= FM^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

also $FM = \frac{1}{2}a - c + (2cx : a)$

Ferner aus $PM^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a}$

und $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - ax + x_2 - 2cx$
Summe $= fM^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a}$

also $fM = \frac{1}{2}a + c - (2cx : a)$

$FM + fM = a$

das ist: die Summe der Stralen ist der Hauptachse gleich.

B. §. 710. Man kann also, wenn die Achsen gegeben sind, eine Ellipse mit einem Faden auf folgende Weise beschreiben.

1. Man lasse die zwo Achsen in der Mitte einander rechtwinkelicht durchschneiden.

2. Man bestimme darinnen die zweene Brennpuncte F und f (§. 703.).

3. Man

3. Man schlage in diese Puncte kleine Nägelchen oder Nadeln ein, daran ein Faden, der die Länge der großen Achse hat, an seinen Enden angebunden ist.

4. Diesen Faden spanne man mit Andrückung einer umgekehrten Glufe, auf deren Kopfe er aufliegen kann, oder mit einer Nadel durch derer Oehre er geht: führt man alsdann die Glufe oder Nadel zuerst oben, alsdann unten herum, so beschreibt sie eine Ellipse, und drückt sie auf das darunter liegende Papier ein.

§. 711. Man kann auch mit dem Handzirkel 3. die Puncte der Ellipse auf folgende Weise bestimmen.

1. Setze die Achsen also, daß sie einander in der Mitte durchschneiden, rechtwinkelicht zusammen.

2. Setze einen Fuß des Handzirkels in A, und eröffne ihn nach Belieben, und mit dieser Eröffnung bemerke einen Punct P in der Hauptachse, darauf mache mit dieser Oeffnung aus F und f als Mittelpuncten Bögen bey M, N, G und H.

3. Setze einen Fuß des Handzirkels in a, und eröffne ihn bis in P, und mit dieser Eröffnug mache aus F und f, als Mittelpuncten, wiederum Bögen M, N, G und H, welche die vorigen durchschneiden werden; so sind die 4 Durchschneidungspuncte M, N, G und H an dem Umkreise der Ellipse.

4. Wenn man wieder den Handzirkel in A setzt, und ihm eine andere Oeffnung giebt, als zum erstenmal, und wieder nach der nämlichen Art verfährt, kann man wieder vier Puncte, und also

nach und nach so viele, als man will, an der Peripherie der Ellipse bezeichnen, und endlich sie mit freyer Hand durch alle diese Puncte ziehn.

§. 712. Man kann auch aus lauter Zirkelbögen eine krumme Linie beschreiben, die dem Auge nach eine Ellipse zu seyn scheint, ob sie gleich keine ist, nämlich auf folgende Weise:

1. Beschreibe mit blinden Linien ein Quadrat oder
F.96 eine Raute ABCD; verlängere aber die Seiten über die Spitze A und C hinaus gen F, E, G und H.

2. Aus dem Puncte A, als einem Mittelpuncte, beschreib mit beliebiger Eröffnung des Handzirkels einen Bogen EF zwischen den Linien AE und AF, und eben einen solchen aus dem Mittelpuncte C zwischen G und H.

3. Alsdann setze einen Fuß deines Handzirkels in D, und den andern in F, und beschreib den Bogen FG, und mit eben dieser Oeffnung aus B den Bogen EH; so ist dem Scheine nach eine Ellipse beschrieben: aber sie ist in der That weder eine Ellipse, weder eine andere einige krumme Linie (§. 625.). Verlangt man, daß die von Zirkelbögen gestaltete scheinbare Ellipse von gegebnen Achsen MM und NN sey, so

1. Setze MM und NN rechtwinkelicht zusammen, so daß sie einander in der Mitte durchschneiden.

2. Bestimme auf MM zweene Puncte A und C so, daß MA = MC sey.

3. Bestimme auf der Linie NN' den Punct m so, daß Nm = CM sey.

4. Zieh von m auf C die Linie mC zu, und theile sie in R in zweene gleiche Theile und errichte in R auf mC eine senkrechte Linie RB, welche den Punct B auf der Linie NN', da sie selbe durchschneidet, bestimmen wird.

5. Mache N'D = NB, und zieh die blinden geraden Linien BCH, DCG, DAF.

6. Aus den Puncten A und C beschreib mit den gleichen Stralen AM und CM die Bögen EMF und GMH, und aus den Puncten B und D die Bögen FNG und EN'H; so ist geschehen, was man verlangte.

§. 713.

§. 713. Einen excentrischen Zirkel nennt man den, welcher aus dem Mittelpuncte der Ellipse C um die Hauptachsen Aa beschrieben wird. E. F. 95

Die Figur stellt nur den halben excentrischen Zirkel AKDa vor.

§. 714. Eine jede Halbordinate *KP* des excentrischen Zirkels *AKDa* verhält sich zur respondierenden Halbordinate der Ellipse *MP*, wie die halbe Hauptachse $AC = CD$, zur kleinen *CB*, oder wie die ganze Hauptachse zur kleinen *BH*. L.

Wir haben zu erweisen, es sey $KP : MP = CD : BC$.

In dem Halbzirkel ADa ist (§. 455.) $\begin{cases} HP^2 = AP \times Pa \\ CD^2 = AC \times Ca \end{cases}$

also $KP^2 : CD^2 = (AP \times Pa) : (AC \times Ca)$

In der Ellipse $MP^2 : BC^2 = (AP \times Pa) : (AC \times Ca)$ (§. 689.)

also $KP^2 : CD^2 = MP^2 : BC^2$ (§. 43.)

folglich $KP : CD = MP : BC$ (§180. 4.)

§. 715. Wir wissen, daß die Halbordinaten des Zirkels, welche gleichweit von dem Mittelpuncte entfernet sind, als Sinus, die auf gleiche Cosinus treffen, einander gleich sind (§. 477.); so müssen also auch die Halbordinaten der Ellipse, welche gleichweit von dem Mittelpuncte C entfernet sind, einander gleich seyn. Man kann sich aber die ganze Ellipse als aus lauter unendlich schmalen, und gleich breiten Parallelogrammen zusammen gesetzt vorstellen, die beyderseits miteinander unendlich nahen Halbordinaten als ihren langen Seiten begränzt seyn, und sich gegeneinander, was ihren Flächeninnhalt belangt, wie diese B.

Halb-

Halbordinaten verhalten (§. 502.): alſo weil ſe vier Halbordinaten, die gleichweit von dem Mittelpuncte entfernet ſind, einander gleich, und alle auf die Hauptachſe Aa ſenkrecht ſind, muß die Ellipſe durch die Achſen *Aa* und *BH* in 4 gleiche, und ähnliche Theile zerſchnitten werden.

L. §. 716. Der Flächeninnhalt des excentriſchen Zirkels verhält ſich zum Innhalte der Ellipſe, wie die Hauptachſe $AC = CD$ zur kleinen BC.

B. Denn gedenken wir, es werde der Zirkel ſowohl als die Ellipſe durch einander unendlich nahe Ordinaten in lauter unendlich ſchmale gleich breite Parallelogramme zerſchnitten; ſo verhalten ſich dieſe Parallelogramme zueinander wie ihre Höhen (§. 502.), das iſt, die im Zirkel zu denen in der elliptiſchen Fläche, jedes zu dem ihm reſpondierenden, wie die Ordinate des Zirkels zur Ordinate der Ellipſe, nämlich wie $(AC = CD) : CB$ (§. 713.), weil ſich die ganzen Ordinaten zueinander wie die halben verhalten (§. 182. 1.): da dann alle dieſe Theile des Zirkels zu allen reſpondierenden der Ellipſe dieſe Verhältniß haben, ſo hat auch der ganze zur ganzen Ellipſe dieſe Verhältniß (§. 16.).

L. §. 717. Folglich iſt die Fläche der Ellipſe der Fläche eines Zirkels gleich, deſſen Durchmeſſer die mittlere Proportionalgröße zwiſchen der kleinen und großen Achſe iſt.

B. Denn es ſey der Zirkel, der die große Achſe zum Durchmeſſer hat, = C; der Zirkel, welcher die kleine Achſe zum Durchmeſſer hat, = c;

die elliptiſche Fläche = E;
die große Achſe = M;
die kleine = m;

I.	II.
so ist $C:E=M:m$ (§.716)	$C:c=M^2:m^2$ (§507)
also $\overline{EM=Cm}$ (§. 175.)	$\overline{Cm^2=cM^2}$ (§.175)
und $\overline{E=Cm:M}$ (§. 51.)	$\overline{cM:m=Cm:M}$
folglich $E=cM:m$	
und weil auch $E=Cm:M$	
so ist $\frac{cM}{m}:E=E:\frac{Cm}{M}$ (§. 51.)	
und $E^2=\frac{cM}{m}\times\frac{Cm}{M}=\frac{cCMm}{Mm}=C\times c$ (§.75.)	
folglich $C:E=E:c$ (§. 178.).	

Nennen wir nun den Durchmesser des Zirkels, der der Ellipse gleich ist, x

so ist $M^2:x^2=x^2:m^2$ (§. 507.)

folglich $M:x=x:m$ (§. 148.).

das ist: der Durchmesser dieses Zirkels ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der großen und kleinen Achse, wie zu erweisen war.

§. 718. Wie wir (§. 716.) gezeigt haben, daß die Fläche der ganzen Ellipse sich zur Fläche des excentrischen Zirkels verhalte, wie die kleine Achse zu der großen, eben so ist es auch leicht zu begreifen, daß auch ein Theil derselben APM zum respondierenden des Zirkels APK die nämliche Verhältniß habe. B.

§. 719. Wenn der Stral CA und der Bogen AK in Graden, oder sein Sinus, oder Cosinus gegeben ist, daß sich der Sinus daraus bestimmen läßt, findt man leicht den Innhalt des halben Abschnittes des Zirkels AKP (§. 492.): und B.

wenn

wenn dieser gefunden ist, läßt sich durch die Regel detri auch der halbe elliptische Abschnitt AMP finden; weil sich jener zu diesem wie die große Achse zur kleinen Verhält.

B. §. 720. Das Dreyeck FPM ist durch die Grundlinie FP und seine Höhe PM bestimmt (§. 492.): wenn man nun seinen Innhalt von dem halben elliptischen Abschnitte AMD abzieht, so bleibt noch der elliptische Raum FAM übrig, der zwischen einem Theile der Achse AF, von der Scheitel nämlich bis zum Brennpuncte, und dem Führungsstrale FM und dem elliptischen Bogen AM eingeschlossen ist. Wenn aber die Halbordinate mp vor dem Brennpuncte liegt; so darf man nur das Dreyeck pmf zu dem halben Abschnitte Amp addieren, so erhält man die Fläche von AmF, welche zwischen dem Bogen Am, dem Strale Fm, und dem Theile der Achse von der Scheitel bis zum Brennpuncte AF liegt.

§. 721. Man hat die Bestimmung der elliptischen Stücke AmF oder AMF, die der von A ausgehende Führungsstral bis er in m oder M kömmt, beschreibet, in der Astronomie nöthig, und eben darum wollte ich sie auch hier kürzlich abhandeln: denn die Planeten folgen wirklich beynahe dem Gesetze, welches Kepler zuerst erfunden hat, vermög dessen der Führungsstral solche elliptische Stücke oder Areen beschreibet, die den Zeiten proportioniert sind: das ist, wenn sich etwa AmF zu AMF verhält wie 1 : 2, so braucht auch der Planet noch so viel Zeit von A in M durch den Bogen AM, als von A in m durch den Bogen AmM zu kommen.

A. §. 722. Durch einen in einer Ellipse ge-
F. 97 gebnen Punct *M* eine Tangente zu ziehen.

1. Zieh vom fernern Brennpuncte F eine gerade Linie FG durch M so weit über M hinaus, daß MG = MF werde, und zieh GF. a.

2. Theile die Linie GF in zweene gleiche Theile in E. F.

3. Zieh von M durch E eine gerade Linie MET; so ist sie die Tangente der Ellipse in M.

Um dieses zu erweisen dörfen wir nur zeigen, daß weder ein Punct N oder M, nach einer n unter M in der elliptischen Peripherie seyn könne. B.

Wenn ein Punct N oder n in dieser Peripherie ist, so muß fN + Nf oder fn + nF = aA seyn (§. 709.). Wenn wir also erweisen, daß dieses nicht seyn könne, so ist weder N noch n in der Peripherie der Ellipse ꝛc.

I.

Nun aus der Construction ist MG = MF

also fG oder fM + MG = fM + MF (§. 45.)

aA = fM + MF (§. 709.)

also fM + MG = fG = aA (§. 43.)

II.

aus der Construction ist MF = MG und FE = GE

also NE ist senkrecht auf GE (§. 335.)

folglich NG = NF und nG = nF (§. 345.)

fN+NG=fN+NF und fn+nG=fn+nF (§45)

fN + NG ▷ fG fn + nG ▷ fG (§339)

also fN + NF ▷ fG fn + nF ▷ fG (§.15.)

aA = fG aA = fG (I)

also fN + NF ▷ aA fn + nF ▷ aA (§.15.)

also fN + NF ist nicht = aA fn + nF ist nicht = aA

also kann weder N noch n in der Peripherie der Ellipse seyn.

B. §. 723. In den ähnlichen und gleichen Dreyecken EMG, und EMF sind auch die Winkel bey M gleich,

nämlich EMG = EMF (§. 381.):
es ist aber EMG = NMf (§. 313.):
folglich EMF = NMf.

§. 724. Daher kömmt es, daß die elliptischen Spiegel die Licht- und Schallstralen, welche aus einem Brennpuncte F ausgehen, wieder in dem andern f versammeln. Und darum thut eben dieses auch das kleine sphärische Spiegelchen in dem Gregorianischen Spiegeltelescope, denn es ist selbes nach dem Krümmungsstrale einer Ellipse von erforderlicher Excentricität an ihrer Scheitel geschliffen. Dieser Krümmungsstral, wie man es in andern Schriften erwiesen findet, in A und a ist dem halben Parameter der Ellipse in Beziehung auf ihre Achse gleich. Daher also kömmt es auch, daß, wenn jemand seinen Mund in einem der zweener Brennpuncte eines elliptischen Gewölbes haltend ganz stille redet, ein anderer, der sein Ohr in den andern Brennpunct hält, alle Worte verstehet, obgleich die dazwischenstehenden nichts davon hören: denn die Schallstralen, wie man in der Physick beweiset, prellen auch wie die Lichtstralen unter einem dem Einfallswinkel gleichen Winkel zurücke.

B. §. 725. Wenn die Halbordinate MP gegeben, und die Tangente MT gefunden ist, kann man leicht daraus die Subtangente PT berechnen (§. 396.); und darnach auch die Normallinie MR, und Subnormallinie RP durch die Regel detri finden. Denn die zwey rechtwinklichten Dreyecke PMT und PRM sind einander ähnlich (§. 391.), und PT : MT = PM : RM, und PT : PM = PM : PR (§. 392.).

§. 726. Weil der Winkel E, und RMT rech- 3.
te Winkel sind, so ist es klar, daß die Linien EF oder EG, und RM parallel seyn (§. 366.); folglich ist

$$fG : fF = MG : RF$$

oder $(fM+MG=fM+MF) : fF=(MG=MF) : RF$

oder $aA : fF = MF : FR.$

das ist: die Hauptachse verhält sich zur doppelten Excentricität, wie der Stral vom nähern Brennpuncte, zur Entfernung der Subnormallinie von selbem in der Achse.

§. 727. Wir können, wenn die Achsen gege- 3.
ben sind, die Brennpuncte f und F (§. 707.), und die Excentricität CF (§. 705.), und die einer jeden Halbordinate CAP gehörige Abscisse PM (§. 697.), und den Stral FM (§. 708.); folglich auch die Linie FR, und also den Punct R auf der Achse Aa bestimmen: haben wir diesen, so ergiebt sich RP; weil der Punct P schon durch die Länge der Abscisse bestimmt ist. Aus RP und PM aber findt man durch die Regel detri auch PT; weil RP: PM = PM : PT (§. 725.): endlich, wenn der Punct T bestimmt ist, läßt sich von T auf M die Tangente ziehen.

§. 728. In algebraischen Formeln, wenn wir bey den bisher gebrauchten Benennungen bleiben, erhalten wir

die Subtangente $PT = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$;

$$AT = ax : (a - 2x);$$

die Subnormal $PR = \frac{1}{2}(b - \frac{bx}{a})$;

die doppelte Excentricität $fF = \sqrt{(a^2 - ab)}$.

§. 729. Ein jeder schiefer Durchschnitt e. eines Cylinders ist eine Ellipse.

Man

B. Man kann jeden Cylinder als den untersten Theil (der nämlich nahe an der Grundfläche ist) eines Kegels, dessen Höhe in Rucksicht auf den Durchmesser der Grundfläche und der Höhe des Cylinders unendlich groß ist, betrachten. Denn auf diese Weise sind die einander gegenüberstehenden Seiten parallel, und bleibt die Dicke unverändert; folglich muß jeder schiefer Durchschnitt beyderseits die Seiten durchschneiden, und eine Ellipse seyn (§. 688.), deren Achse auf der tiefern Seite mit der Seite des unendlich hohen Kegels einen aufwärts gegen die unendlich entfernte Spitze desselben schauenden spitzigen Winkel macht.

§. 730. Einen schief durchschnittenen Cylinder, wie er optisch entworfen sich dem Auge in einer sehr großen Entfernung darstellen muß, zeiget die 99 Figur. I. Dessen verschiedene Durchschnitte besonders vorgestellt sind, II, III ꝛc. I. Weiset uns den elliptischen Durchschnitt EA MB schief anzusehen, nebst der zirculären Grundfläche eamb. Man muß sich aber einbilden, es gehen von jedem
F.99 Durchschnitte zwoer Linien in der Ellipse A, B, C ꝛc. auf die Grundfläche senkrechte Linien Aa, Bb, Cc herunter, welche in der Figur nicht alle vorgestellt werden, damit nicht ihre Menge Verwirrung mache, und dem Auge beschwerlich werde. II. Stellt den elliptischen Durchschnitt, und III. die zirkuläre Grundfläche gerade und besonders für die Augen. Die übrigen Figuren IV, V ꝛc. sind lauter verticale Durchschnitte, die man sich einbilden muß, als ob sie senkrecht auf der Grundfläche stünden, also daß die nämlichen Buchstaben aufeinander eintreffen. Es stehe nämlich die Figur IV, auf ab der Figur III, also daß a in jener auf a in dieser, und b auf b eintreffe: eben so stehe die Fig. V auf de ꝛc. und alle diese außer der X seyn in dem Cylinder. Diese aber außer ihm stehe senkrecht auf aT der Figur III, und berühre mit ihrer Linie Aa die Seite Aa des Cylinders. In Gegenwart ist dieses alles den Anfängern in einer einzigen Maschine vom Bleche leicht zu zeigen, da kleine Stängelchen von jedem Durchschnitte zwoer Linien in der Ellipse auf die respondierenden in dem Zirkel

herun-

herunter gehen. Und auch ein schiefgeschnittenes cylindrisches Stück Holz kann erklecken, die meisten, nämlich oben schief die Ellipse, unten den Zirkel, und an den Seiten herum, die von den Puncten an der Peripherie der Ellipse A, N, E ꝛc. auf die an der Peripherie des Zirkels a, n, e herunterfließenden Linien vorzustellen. Damit aber auch die, welche eine solche Maschiene nicht zu Gesicht bekommen, sich alles leichter vorstellen können, so habe ich alle Durchschnitte hier besonders entworfen.

§. 731. Man gedenke, es sey ein Zirkel (die Grundfläche des Cylinders) mit zween Durchmessern de und ab die senkrecht übereinander gehen, durchschnitten: so heiße ich einen ab den Hauptdurchmesser (diametrum principalem), den andern aber de seinen conjugierten (diametrum conjugatam), und in der Ellipse heiße ich den, welcher gerade ober ab dem Hauptdurchmesser des Zirkels steht, AB den Hauptdurchmesser der Ellipse, und seinen conjugierten DE den, welcher gerade ober dem conjugierten de in dem Zirkel steht. E. F. 99 I. II III.

§. 732. Es ist gleichgültig was für einen dieser zweene Durchmesser man für den Hauptdurchmesser will gelten lassen, doch daß man den im Zirkel, und den gerad ober ihm stehenden in der Ellipse zusammen nehme. Sowohl in der Ellipse als im Zirkel ist einer des andern conjugierter. Daß aber diese Linien in der Ellipse wirklich ihre Durchmesser (§. 638.) seyn, wollen wir gleich jetzt zeigen.

§. 733. Die jetzt sogenannten conjugierten Durchmesser der Ellipse gehen durch dieser ihren Mittelpunct, und werden da in zweene gleiche Theile geschnitten. L.

Denn der Mittelpunct der Ellipse steht gerade ober dem Mittelpuncte des Zirkels, und man darf nur den verticalen Durchschnitt des Cylinders durch einen dieser Durchmesser AB Figur IV besonders vor sich nehmen, so wird man gleich sehen, daß B. IV.

(weil

(weil BC:CA = b′c′ : c′A = bc : ca, und bc = ca ist) BC = CA seyn müsse; eben so, wenn man
V. die Figur V vor sich nimmt, wird man sehen, daß DC = CE sey, weil d′c′ = c′e′ ist: also gehen beyde conjugierte Durchmesser AB und DE durch den Mittelpunct C, und werden dort in zweene gleiche Theile zerschnitten.

Z. §. 734. Aus dem vorigen Beweise ist es klar, daß, wenn die conjugierten Durchmesser die Achsen der Ellipse sind, die kleine Achse der Dicke des Cylinders, das ist, dem Durchmesser der circulären Grundfläche gleich sey, weil sie gerad über ihm steht und damit parallel ist, und zwischen parallelen Seiten steht (§. 423).

L. §. 735. Eine jede Linie *MN*, welche dem
F.99 conjugierten Durchmesser *DE* parallel ist, wird
II. von dem Hauptdurchmesser in der Mitte
III. durchschnitten.

B. Denn jeder solcher Durchmesser MN steht gerade über der Ordinate des Zirkels mn, welche dem conjugierten Durchmesser des Zirkels de parallel ist, und von dem Hauptdiameter ab in k in zweene gleiche Theile nk und km geschnitten
VII wird: nun ist immer MK : KN = Mk′ : k′n′ = mk : kn (§. 401.); folglich, weil mk = kn (§. 434.), muß auch MK = KN seyn.

Z. §. 736. Also sind die conjugierten Durchmesser wirkliche Durchmesser der Ellipse (§. 638.). Und weil alle conjugierte Durchmesser durch den Mittelpunct der Ellipse gehen: so muß jede Linie, die durch den Mittelpunct der Ellipse geht, ein wahrer Durchmesser derselben seyn.

§. 737. Ein jeder Durchmesser *AB* einer 3.
Ellipse zerschneidet sie in zwo gleiche Theile. Denn zerschneide man mit den Ordinaten, die dem conjugierten Durchmesser DE parallel seyn, die ganze Ellipse in lauter unendlich schmale Parallelogramme, so werden je zwey, die zwischen den nämlichen Ordinaten dieß- und jenseits des Durchmessers AB liegen (weil sie gleiche Grundlinien, nämlich die Halbordinaten, haben, und zwischen Parallelinien stehen, folglich gleich hoch sind) einander gleich seyn (§. 491.): also müssen auch alle Parallelogramme miteinander diesseits des Durchmessers AB allen jenseits desselben gleich seyn: das ist, der Durchmesser AB zerschneidet die Ellipse in zweene gleiche Theile.

§. 738. Und weil auch die Parabel als eine 3.
Ellipse von unendlicher Excentricität, oder als ein der Scheitel naher Theil derselben kann angesehen werden; so muß eine jede gerade Linie, die der Achse parallel ist, ihr Durchmesser seyn. Denn, weil der Mittelpunct einer Ellipse von unendlicher Excentricität, unendlich weit von ihrer Scheitel entfernet ist, so müssen alle Linien, welche durch ihren Mittelpunct auf einen Punkt des Umkreises zugehen, der der Scheitel nahe, oder wenigst nicht unendlich von ihr entfernet ist, mit der Achse parallel seyn; und also sind alle mit der Achse parallele Linien ihre Durchmesser.

§. 739. Die Abscissen eines Durchmessers k.
einer Ellipse sind den Abscissen des Durch- F.99
messers des Zirkels; und die Halbordinaten der Ellipse den Halbordinaten des Zirkels, die in der Grundfläche des Cylinders gerad unter ihnen liegen, proportional.

§. Denn es sey AK eine Abscisse in der Ellipse von dem Durchmesser AB, so liegt in der Grundfläche unter ihr ak. Nun ist in dem verticalen
IV. Durchschnitte IV. Fig. Ab′ parallel mit ab und Kk parallel mit Aa, folglich Ak′ = ak.

und Ak′ oder ak : AK = Ab oder ab : AB (§401)
und eben so Af′ oder af : AF = Ab : AB.

folglich ak : AK = af : AF (§. 43.)

und ak : af = AK : AF.

das ist: 1. die Abscissen des Durchmessers der Ellipse *AK* und *AF* sind den Abscissen des Durchmessers des Zirkels, welche gerade unter ihnen liegen, *ak* und *af* proportional.

Es seyn in der Ellipse Ordinaten NM und
ED, unter denen im Zirkel nm und ed liegen.
V. Die Figur V. sey ein verticaler Durchschnitt durch
VII ED, und die Figur VII. ein mit dieser paralleler durch NM, e′D sey mit ed, und n′M mit nm parallel, so ist der Winkel EDe′ = NMn′

folglich ist △EDe′ ∽ △NMn′ (§. 382.)

ED : NM = e′D : n′M oder ed : nm (§. 384).

das ist: 2. die Ordinaten der Ellipse sind den Ordinaten des Zirkels, (folglich auch die Halbordinaten der Ellipse, den Halbordinaten des Zirkels) welche gerade unter ihnen liegen, proportional.

§. 740. Es forderte zwar ein vollkommener Beweis von der Gleichheit der Winkel EDe′ und NMn′ eine vorausgesetzte weitläufigere Abhandlung von den Durchschnitten der Flächen; allein es scheint mir doch nicht nöthig zu seyn, daß ich die Anfänger damit aufhalte; denn, wenn man diese Durchschnitte in einer kleinen Maschine, davon wir oben gemeldet haben, vor Augen sieht, wird man

die

die Wahrheit dieses Satzes gleich so klar einsehen, daß man gar kein Bedenken hat.

§. 741. Es ist also AC:AF = ac:af
und CB:FB = cb:fb
also (AC×CB):(AF×FB) = (ac×cb):(af×fb) (§. 181. 3.)
= ce²:fg²
denn ac×cb ist = ce², und af×fb = gf² (§. 455).

§. 742. Eben so ist CE:FG = ce:fg
folglich CE²:FG² = ce²:fg² (§180, 3)
nun (AC×CB):(AF×FB) = ce²:fg² (§. 741.)
also (AC×CB):(AF×FB) = CE²:FG²

das ist: die Quadrate der Halbordinaten der Ellipse verhalten sich gegeneinander wie die Producte aus den respondierenden Theilen des Diameters; folglich verhalten sich die halbordinaten der Ellipse an einem Durchmesser gegeneinander wie die Quadratwurzeln der Producten aus den ihnen respondierenden Theilen dieses Durchmessers.

§. 743. Weil AC×CB = AC²
und (AC×CB):(AF×FB) = CE²:FG² (§. 742.)
so ist AC²:(AF×FB) = CE²:FG² (§. 15.)
oder FG²:(AF×FB) = CE²:CA² (§. 178.)
DE² : AB² = CE²:CA² (§. 180. 3)
also FG²:(AF×FB) = DE²:AB² (§. 43.)

das ist: das Quadrat einer jeden Halbordinate an einem Hauptdurchmesser verhält sich zum Producte der respondierenden Theile desselben, wie das Quadrat des andern conjugierten

Durchmessers zum Quadrate des Hauptdurchmessers.

3. §.744. Es sey $AB=a, AF=x, AC=X, FG=y, CE=Y$ so wird $FG^2 : CE^2 = (AF \times FB) : (AC \times CB)$ (§742)
seyn $y^2 : Y^2 = (x \times a-x) : (X \times a-X)$
$= (ax-x^2) : (aX-X^2)$

$y^2 : (ax-x^2) = Y^2 : (aX-X^2)$
$a : b$ (§.690.)

$ay^2 = abx - bx^2$

das ist: die Gleichung der Ellipse auf was immer für einen ihren Duchmesser ist die nämliche mit der Gleichung auf ihre Achse (§.690). Es bedeutet aber hier a den Durchmesser b den Parameter.

3. §.745. Da die Halbordinaten an dem Durchmesser der Ellipse den respondierenden in dem Zirkel, ober denen sie stehen, proportional sind (§.739); und jede von dem Mittelpuncte gleichweit entfernte Halbordinate als Sinusse, die zu gleichen Cosinussen gehören (§. 457.), gleich sind, so müssen auch die Halbordinaten an dem Durchmesser der Ellipse, welche gleichweit von ihrem Mittelpuncte entfernet sind, einander gleich seyn.

3. §. 746. Also zerschneiden die conjugierten
11. Durchmesser die Ellipse in vier gleiche Theile, derer die einander entgegengesetzten auch einander ähnlich sind.

Denn weil $AC = CB$ ist (§. 735.), so läßt sich AC in eben so viele, eben so große unendlich kleine Theile zerschneiden als CB; folglich, wenn durch jeden solchen Theilungspunct eine Ordinate durchgeht, werden die Halbordinaten in dem Theile

le AEC eben so viele Parallelogramme abschneiden, als die in dem Theile ECB, und jedes in jenem wird einem in diesem gleichweit von dem Mittelpuncte entfernten gleich seyn (§. 491.), weil die gleichweit entfernten Ordinaten als Grundlinien dieser Parallelogramme, die alle einerley Höhen haben, einander gleich sind (§. 745.): also sind auch alle Parallelogramme, die auf der Linie AC stehen, allen auf der Linie BC stehenden gleich, das ist, das Stück AEC ist dem ganzen Stücke ECB gleich. Und eben so wird erwiesen, daß ACD = DCB sey. Wir haben auch schon vorhin (§. 737.) gesehen, daß AEC + ECB = ACD + DCB sey; folglich sind alle vier Stücke einander gleich, weil jedes der vierte Theil der Ellipse ist.

Daß aber die einander entgegengesetzten z. B. ECB und ACD zugleich auch einander ähnlich seyn, sieht man daraus, weil die Neigung der Halbordinaten, die die langen Seiten der Parallelogramme ausmachen, in beyden auf die Linien AC und CB auf denen sie alle aufstehen, einerley ist, und ist also je ein Parallelogramm in einem dem eben so weit vom Mittelpuncte entfernten, im andern völlig ähnlich und gleich, weil nichts in einem ist, daß man nicht auch im andern findt.

§. 747. Der conjugierte Durchmesser *DE* ist einer geraden Linie parallel, welche die Ellipse an der Scheitel *A* des Hauptdurchmessers *As* berührt.

Es berühre eine ebene Fläche ATa die Seite des Cylinders Aa, so wird sie durch die Tangente des Zirkels aT, und die Tangente der Ellipse AT durchgehen, jene wird zugleich in der horizontalen Fläche des Zirkels außer ihm, die andere B. F. 99 I. II III.

dere AT aber in der schiefen Fläche der Ellipse außer ihr liegen. Wenn nun eine andere ebene Fläche durch DEde durchgeht, so wird selbe der bemeldten Fläche, die den Cylinder berühret, parallel seyn; weil der conjugierte Durchmesser des Zirkels de sowohl (§. 731.), als die Tangente aT, auf den Durchmesser ca (§. 475.) senkrecht, und also de mit aT parallel ist (§. 366.); also muß auch die Linie DE, welche zugleich in der Fläche DEed, und zugleich in der nämlichen Fläche (der erweiterten Fläche nämlich der Ellipse) liegt, mit der Tangente AT parallel seyn.

§. 748. Wer diese Durchschnitte in der Maschine selbst vor Augen hat, dem wird dieser Beweis ganz klar werden. Man wird aber jetzt auch sehen, daß man den conjugierten Durchmesser durch einen Durchmesser, der mit der Tangente an der Scheitel des Hauptdurchmessers parallel ist, erklären könne.

L. §. 749. Wenn man von dem äußersten Puncte *A* eines Durchmessers *AB* auf die Achse *VS* eine senkrechte Linie *AD* zieht, so ist $CP : CV = CV : CT$.

B. F. 99 I. Es sey auf der zirkulären Grundfläche a der Punct, welcher gerade unter A steht; und vs sehe gerade unter VS; und man ziehe aP senkrecht auf vs, so ist

I.

$$\begin{array}{l} pc : ca = ca : cT \quad (\S.\ 392.) \\ \quad ac = cv \quad (\S.\ 271.) \\ \hline pc : cv = cv : cT. \end{array}$$

VIII. I. Nun p ist gerade unter P, und ap gerade in der nämlichen verticalen Fläche AaPp mit AP, und diese Fläche durchschneidet die Fläche SsT senkrecht (denn jene steht auf aP, diese auf sT, beyde auf

dem

dem Zirkel senkrecht): die Verticallinie Pp also ist mit der Verticallinie Cc parallel, folglich ist in dem Dreyecke CTc

II.

CT : cT = PC : pc = CV : cv (§. 401.)

(§. 178.) PC : CV = pc : cv und CV : CT = cv : cT

cv : cT = pc : cv (I)

PC : CV = cv : cT (§. 43.)

CV : CT = cv : cT

PC : CV = CV : CT (§. 43.).

§. 750. Also, wenn CP = CV — VP, und CV gegeben sind, kann man CT = CV² : CP berechnen (§. 185.). Und, wenn man CS = CV zu CT addiert, bekömmt man ST. B.

§. 751. Es sey STs ein verticaler Durchschnitt des Cylinders durch die Hauptachse der Ellipse SV, der sich außer den Cylinder hinaus bis an den Punct T erstreckt, da die Tangente der Ellipse AT die Fläche dieses Durchschnittes erreicht; sT sey die bis in T verlängerte Achse des Zirkels sv, in der horizontalen Fläche, welche durch T durchgehend den Cylinder durchschneidet, daß also sv gerad unter SV in dieser Fläche liege; und s'V sey mit sv parallel; ist SV : Ss' = ST : Ss (§. 401.), also nachdem ST das dritte Glied dieser Proportion gefunden ist (§. 750.), läßt sich auch Ss durch die Regel detri finden. Denn ST zufinden war CV gegeben (§. 750.), also haben wir auch SV = 2CV (§. 738.) das erste Glied dieser Proportion; das zweyte Glied Ss' läßt sich aus Vs' dem Durchmesser des Cylinders, welcher der kleinen Achse gleich ist (§. 734.), und SV der großen Achse bestimmen (§. 396.): also sind schon alle drey B.

Gle-

Gliedes SV, Ss' und ST da, aus denen man das vierte Ss findt.

E. II. §. 752. Die Halbordinaten *ER* und *AP*, von den äußersten Puncten *E* und *A*, der conjugierten Durchmesser *AB*, *ED* auf die Achse *VS* verhalten sich gegeneinander verkehrt wie ihre Entfernungen von dem Mittelpuncte.

das ist: PC : CR = ER : AP.

B. III. In dem Zirkel Fig. III. der Grundfläche unsers Cylinders ist

I.

acp = acd − vcd
= 90° − vcd (§. 731.)
ecr = vcd (§. 313.)

also acp = 90 − ecr (§. 15.)
rec = 90 − ecr (§. 378.)

folglich acp = rec (§. 43.)

△acp ∽ △rec (§. 382.)
ap : pc = cr : re
ac = ec (§. 271.)

△apc ≅ △cre (§. 381, §. 356.)
re = cp und rc = ap.

II.

Man betrachte nun die Parallelogramme Aa pP (Fig. VIII.) und EerR (Fig. IX.) welche verticale Durchschnitte des Cylinders, jener durch AP und ap, der letztere durch ER und er sind, so sieht man wohl daß ap = AP, ER = er (§. 423.). sey.

III.

Man betrachte jetzt auch den verticalen Durchschnitt in der Figur 99. I. RPpr durch die Hauptachsen SV und sv, darinnen Pp, Cc, und Rr mit-

einan-

einander, Pr′ aber mit pr parallel ist, und Pc′ der Linie pc, c′r′ der Linie cr in einem Parallelogramme entgegen stehen, daß also Pc, = pc und c′r′ = cr sind (§. 401.); so ist dann

PC : CR = Pc′ : c′r′ (§. 401.)

also PC : CR = pc : cr (§. 15.)

pc = re und er = ap (I)

also PC : CR = er : ap (§. 15.)

er = ER und ap = AP (II)

also PC : CR = ER : AP (§. 15.).

§. 753. Lehnsatz. Wenn eine gerade Linie *vs* von einem Puncte *c* in zweene gleiche, L. III. und von einem andern Puncte *r* in zweene ungleiche Theile getheilet wird, so ist das Quadrat der halben Linie *vs* nämlich cs^2 = dem Quadrate des mittlern Theiles *cr* nebst dem Rectangel oder Producte der ungleichen Theilen *vr* und *rs*, oder dem Quadrate der mittlern Proportionalgröße zwischen ihnen gleich, nämlich $ce^2 = cs^2 = cr^2 + re^2$.

Beschreiben wir über die Linie rs einen halben Zirkel, und errichten darinnen die Perpendicularlinie re, so ist, weil cs = ce (§. 271.), B.

$cs^2 = ce^2 = cr^2 + rc^2$ (§. 394.);

$re^2 = vr \times rs$ (§. 455.):

also $cs^2 = ce^2 = er^2 + (vr \times rs)$ (§. 15.).

§. 754. Eben so ist $cs^2 = ca^2 = ap^2 + pc^2$ (§. 394); S.

$cs^2 = cr^2 + (vr \times rs)$ (§. 753.):

also $ap^2 + pc^2 = cr^2 + (vr \times rs)$;

folglich $ap^2 + pc^2 - cr^2 = vr \times rs$.

§. 755.

B. §. 755. Weil $cp = er$ (§. 752.)
so ist $cp^2 = er^2$
nun ist $cr^2 = vr \times rs$ (§. 753.)
also $cp^2 = vr \times rs$
und eben so ist $cr^2 = vp \times ps$.

Nun wie aus dem §. 401. erhellet, verhalten sich die mit den größern Buchstaben bezeichneten Linien der Figur II. gegeneinander, wie die mit den nämlichen aber kleinern bezeichneten in der Figur III. also

weil $pc^2 = sr \times vr$ und $cr^2 = vp \times ps$,
so ist auch $PC^2 = SR \times VR$ und $CR^2 = VP \times PS$:
folglich $PC^2 : CR^2 = (SR \times VR) : (VP \times PS)$.

B. §. 756. Weil nun $PC^2 : CR^2 = (SR \times VR) : (VP \times PS)$,
und auch $ER^2 : AP^2 = (SR \times VR) : (VP \times PS)$
(§. 689.);
so ist $PC^2 : CR^2 = ER^2 : AP^2$:
folglich $PC : CR = ER : AP$.

L. §. 757. Wenn man den Anfang der Abscissen von dem Mittelpuncte C nimmt, so verhält sich die Hauptachse der Ellipse zur kleinen Achse, wie eine Abscisse der großen Achse, die dem äußersten Puncte eines andern Durchmessers respondiert, zur Halbordinate, die von dem äußersten Puncte des conjugierten Durchmessers herabgeht.

II. nämlich es ist $VS : LQ = CR : AP$
oder $CS : CQ = CR : AP$.

B. Denn es ist $ER^2 : CQ^2 = (VR \times RS) : (VC \times CS)$
(§. 689.),
$= (VR \times RS) : (CS \times CS)$
(§. 271.);

Es ist auch $\overline{VR \times RS} = CP^2$ (§. 755.):
folglich $\overline{ER^2 : CQ^2} = CP^2 : CS^2$ (§. 15.);
und also $\overline{ER : CQ} = CP : CS$ (§. 180. 4.),
oder $\overline{CP : ER} = CS : CQ$ (§. 178.);
nun ist $\overline{CP : ER} = CR : AP$ (§. 756.):
also $\overline{CS : CQ} = CR : AP$ (§. 43.).

§. 758. Aus $\overline{CP : ER} = CS : CQ$, 3.
oder $\overline{CS : CQ} = CP : ER$ (§. 178.),
folget $\overline{ER = \frac{PC \times CQ}{CS}}$ (§. 185.)

§. 759. Das Parallelogramm aus den conjugierten Durchmessern ist gleich dem Producte aus den Achsen, oder das Parallelogramm aus den halben conjugierten Durchmessern ist gleich dem Producte aus den halben Achsen. E.

I.

Man ziehe AY senkrecht auf DE, so kann man DE als die Grundlinie, und AY als die Höhe eines Parallelogrammes betrachten, das die unter dem Winkel ACD vereinigte halbe Durchmesser AC, und CD zu seinen Seiten hat (§. 419.): und also ist der Innhalt dieses Parallelogrammes $= CD \times AY$: B.

II.

Die Tangente AT ist mit dem Durchmesser CD parallel (§. 737.): ziehen wir nun auf diese die Linie CZ senkrecht, so ist CZT ein rechter Winkel, und $CZ = AY$ (§. 361. §. 359.):

also $CD \times AY = CD \times CZ$ (§. 15.):
$CD \times AY$ ist der Innhalt des Parallelogramms aus den halben Durchmessern (I)

$CD \times CZ$ ist der Innhalt dieses Parallelogrammes.
$CL \times CV$ ist das Rectangel oder Product aus den halben Achsen, also haben wir nur zum völligen Beweise unsers Satzes noch übrig zu beweisen, es sey $DC \times CZ = CL \times CV$.

III.

Nun ist EC parallel mit TZ (§. 749.);
folglich $ECR = CTZ$ (§. 364.);
und $\triangle CRE \backsim \triangle TZC$ (§. 382.):
also $CE : ER = TC : CZ$ (§. 384.)
also $ER \times TC = CE \times CZ$ (§. 175.);
$CE = CD$ (§. 733.)
folglich $ER \times TC = CD \times CZ$ (§. 15.).
$ER = (PC \times CL) : CS$ oder CV (§. 758.); $TC = CV^2 : CP$ (§. 749.):

also $\frac{PC \times CL}{CV} \times \frac{CV^2}{CP} = CD \times CZ$ (§. 15.):

oder $\frac{PC \times CL \times CV^2}{PC \times CV} = CD \times CZ$ (§. 81.):

oder $CL \times CV = CD \times CZ$;
weil $PC : pc$, und $CV : cv = 1$ ist.

§. 760. Der hier erwiesene Satz, und die Zusätze zu dem §. 739. erwiesenen Lehrsatze sind der Grund verschiedener Lehrsätze in der Mechanik von den Centralkräften, die man jetzt gemeiniglich in die Physik einmischt; darum habe ich sie nicht übergehen wollen. Aber was ich davon hier vorgetragen habe, ist auch hinreichend die Hauptsätze von den Centralkräften, so viel man davon den Anfängern in der Physik vorträgt, zu verstehen; und zu

erwei-

erweisen, wenn man je die Beweise, wie es wohl möglich ist, und wirklich H. Jacob Zallinger in seinem kleinen Werke Lex universalis gravitatis &c. das im Jahre 1769 zu München erschienen ist, gethan hat, also einrichtet, daß man nicht nöthig hat den Stral in den Puncten der Ellipse bestimmen zu können. Ja es werden die, welche bemeldtes Büchlein durchgehen wollen (nachdem sie das, was hier vorgetragen ist, werden erlernet und sich geläufig gemacht haben) in selben die vorläufige Abhandlung de sectione coni præsertim elliptica, ganz übergehen können, weil im Künftigen kein geometrischer Satz vorkömmt, um das übrige darauf zu gründen, der hier nicht wäre vorgetragen, und erwiesen worden. Ich habe mich auch überall bemühet jeden Anfänger durch die kürzeste Wege zu führen, um ihm das, was er von den Eigenschaften der Ellipse sonderlich wissen soll, beyzubringen. Nun wollen wir nur noch etwas weniges von der Radlinie sprechen, als einer sehr merkwürdigen krummen Linie, davon man in vielen physikalischen Büchern redet, und Gebrauch macht.

V. Von der Radlinie.

§. 761. Wenn sich ein Zirkel AGBA (circu- E.
culus genitor) auf einer geraden Linie ED da- F. 98
her wälzet, so heißt die krumme Linie EAD, die ein Punct an der Peripherie des Zirkels, der anfangs die gerade Linie berühret: bey Umwälzung des Zirkels AGBA beschreibt, eine **Radlinie von gerader Wälzung**, oder ohne Beysatz eine **Radlinie** (cyclois): wenn aber der Zeugzirkel auf einen andern Zirkel oder andern krummen Linie sich wälzet, so heißt die krumme Linie, die ein Punct des Zeugzirkels, der den andern anfangs berührte, beschreibet, eine **Radlinie von krummer Wälzung** (Epicyclois); und zwar die obere, wenn die Wälzung des Zeugzirkels über die erhabene Seite der krummen Grundlinie; die untere aber wenn sie auf der hohlen oder innern geschieht.

§. 762. Es sind also die Radlinien von ge- Z.
rader Wälzung alle einander ähnlich. Entgegen

aber von krummer Wälzung giebt es unendlich viele Arten, und nur die sind einander ähnlich, bey denen der Stral des Zeugzirkels zum Strale des Grundzirkels die nämliche Verhältniß hat, und die Wälzung von der nämlichen Art (die obere oder untere) ist.

B. §. 763. Es ist klar, daß die grade Linie DE, über die der Zeugzirkel hergewälzt wird, da er eine Radlinie beschreibt, seine Peripherie; und daß bey jeder Stellung desselben, die Linie MB (zwischen dem Berührungspuncte M, und der Achse AB) dem Bogen MB (der sich an Mb anlegt, wenn man den Zirkel von B bis m hinwälzet) gleich seyn müsse (§. 260.): Nun diesen Bogen Mb = MB nennen wir b, und an der Sinus des Bogens am, welcher FM gleich ist (§. 414.), sey = s; so ist die Halbordinate aP = b + s = FB; und wenn der Stral des Zeugungzirkel = r, ne aber der Cosinus des Bogens am = c ist; so ist PB = aF = nM = Me + en = r ± c. Das ist, bis der Zeugzirkel, auf seinem Wege von dem Puncte B gegen D einen Quadranten in seiner Wälzung an die Grundlinie angelegt hat, ist ne ober e, und also nM = Me + en = r + c; darnach aber, wenn sich der Zirkel weiter fortwälzet, kömmt n unter e herunter, und man hat Mn = Me — en = r — c.

§. 764. Sieh hier eine Tabelle von 18 Halbordinaten aP, die zu den Abscissen BP gehören nach dem Strale CB = 10000, oder nach der Achse AB = 20000, wenn man den Anfang der Abscissen von B nimmt; durch deren Hilfe 18 Puncte mit Einschlusse des letzten auf der rechten Seite der Achse BA, und eben so viel auf der linken können bestimmt, und dadurch die Radlinie beschrieben werden (§. 630.), fast eben auf die Weise, wie wir oben §. 659. eine Parabel an dem Parameter zu beschreiben gelehrt haben.

Pa	BP	Pa	BP	Pa	BP
I.	34810.	19848.	VII. 21614.	13420.	XIII. 30348. 3572.
II.	69110.	19397.	VIII. 23811.	11736.	XIV. 30863. 2304.
III.	10256.	18660.	IX. 25707.	10000.	XV. 31380. 1340.
IV.	13409.	17660.	X. 27301.	8236.	XVI. 31345. 603.
V.	16386.	16428.	XI. 28596.	6580.	XVII. 31407. 252.
VI.	19130.	15000.	XII. 29604.	5000.	XVIII. 31416. 0.

§. 765. Weil die Halbordinaten der Radlinie durch Zirkelbögen gegeben werden, und sowohl ihre als der Abscissen Bestimmung durch Sinusse geschieht; so ist es klar, daß die Radlinie eine mechanische sey (§. 635.).

§ 766. Wenn man durch was immer für einen gegebnen Punct *d* des Zeugzirkels *AdB* eine gerade Linie *da* mit der Grundlinie *DE* parallel zieht, so wird der Bogen *Ad* der geraden Linie *ad* gleich seyn. Zweytens: wenn der Bogen *Ad* der geraden Linie *da* gleich ist, so ist der Punct *a* in der Radlinie.

1. Ziehen wir durch den Punct a einen Zirkel, dessen Stral ea = CA: folglich, der Durchmesser mM = AB sey, und der die Grundlinie DE berührt, daß also der Durchmesser mM senkrecht darauf stehe (§. 475.), wie auch AB senkrecht darauf steht, so ist

I.

aus der Construction } mM = AB
M und B sind rechte Winkel

also ist mA parallel mit EMB (§. 359.).
Man setzt adp sey auch parallel damit.

also mA,	EMB, und adP sind parallel	(§. 362.).
	M und B sind rechte Winkel	aus der Construct.
also auch	n und P sind rechte Winkel	(§. 364.).

II.

II.

me = AC Stralen der Zirkel. aus der
mn = AP (I). Construct.

also ne = pc (§. 47.).

III.

n und P sind rechte Winkel (I).

also { an ist Sin. von den Bögen am und aM, ne Cosin.
{ dp ist Sin. von den Bögen Ad und dB, PC Cosin.

ne = pc (II).

also die Bögen am = Ad und aM = dB (§438§439):

folglich sind die Sennen aM = dB (§. 433.).

IV.

EMB berührt die Zirkel in M und B. aus der Constr.
die Bögen, und Sennen aM = dB (III)

also ist aME = dBM (§. 496.).

aM ist parallel mit dB (§. 367.).
ad ist parallel MB. aus der Setzung.

adBM ist ein Parallelogramm (§. 421.)

also ist ad = MB (§. 423.).

V.

a ist ein Punct in der Radlinie und
dem fortgewälzten Zeugzirkel maMb; aus der
und b der entgegengesetzte Punct. Construct.

also da der Punct a in A war, war der Punct b in B;
und Mb ist der abgewälzte Bogen (§. 761.).

also ist der Bogen Mb = MB (§. 763.)
Es ist auch ad = MB (IV)

also ist der Bogen Mb = ad (§. 43.).

VI.

VI.

Die Winkel aem = Meb (§. 313.):

folglich ist der Bogen am = Mb (§. 293.).

ad = Mb (V).

also ist der Bogen am = ad (§. 43.)

es ist aber am = Ad (III).

also ist endlich der Bogen Ad = der geraden Linie ad.

Den andern Theil dieses Lehrsatzes zu beweisen ist es klar, daß, wenn die Linie ad mit DE parallel ist, sie auch mit mA parallel seyn müsse: daraus wird wieder, wie zuvor erwiesen, daß der Bogen Ad dem Bogen am, und folglich der Bogen aM dem Bogen dB, und der Winkel aMD dem Winkel dBD gleich seyn müsse, woraus dann wieder folget, daß aM mit dB parallel, adBM ein Parallelogramm, und ad = MB sey. Da man nun setzet, es sey die Linie ad dem Bogen Ad gleich; und da dieser dem Bogen ma, ma aber dem Bogen Mb gleich ist; so muß ad = MB auch dem Bogen Mb gleich (§. 43.), und also der Punct a in der Peripherie der Radlinie seyn (§. 763.).

§. 767. Wenn man durch einen gegebenen Punct *H* einer Radlinie eine gerade Linie *GH* mit der Grundlinie *DE* parallel zieht, um den Punct *G*, da sie den Zeugzirkel durchschneidet, zu bestimmen; so ist *TV* (die Tangente der Radlinie in dem Puncte *H*) der Sehne des Zeugzirkels *AG* parallel. L.

B. Wir wollen zuerst setzen, die Linie TV, wende sich um den Punct H, und trette ober selbem in die Radlinie hinein, und durchschneide sie auch in h, daß also Hh eine Senne des gleichnamigen Cykloidischen Bogens Hh werde. In diesem Falle (wie wir jetzt gleich erweisen werden) wird die Linie TV mit der Senne AG nicht parallel seyn, sondern wird sich ober H gegen sie hinein neigen: denn die Linie L wird kürzer seyn, als die mit ihr parallele GH. Wenn ich dieses werde erwiesen haben, sodann wird sich gleich zeigen lassen, daß im Falle, da die Linie TH nicht in die Radlinie hinein tritt, sondern sie nur berühret, sie mit der Senne AG parallel werde.

I.

Man setzt die Puncte h und H seyn in der Radlinie.

also sind die Bögen Ag = gh und AG = GH (§766).

II.

Man setzet { DE berühre den Zirkel in dem Puncte B,
Pg sey mit GH, also auch
mit BE parallel (§. 362.).

also sind die Bögen dB = BG (§. 474.).

Nun ist AdB = AgB (§. 284.);

also die Bögen Ad = Ag (§. 47.);

folglich $\frac{1}{2}$Ad = $\frac{1}{2}$Ag (§. 51.).

III.

der Winkel gGA steht an der Peripherie auf Ag:

also $\frac{1}{2}$ Bogen Ag ist das Maaß des Winkels gGA (§. 448.).

$\frac{1}{2}$Ag = $\frac{1}{2}$Ad (II).

also $\frac{1}{2}$ Ad ist das Maaß von gGA (§. 15.).

IV.

IV.

Die geraden Linien AG und dg durchschneiden einander in L innerhalb dem Zirkel.

also ist das Maaß von gLG $= \frac{1}{2}(Ad+gG)$ (§447).

Es ist aber $\frac{1}{2}(Ad+gG) > \frac{1}{2}Ad$ (§. 16.)

also ist das Maaß von gLG $> \frac{1}{2}Ad$ (§. 15.).

Nun ist das Maas von gGA $= \frac{1}{2}Ad$ (III);

also ist gLG $>$ gGA (§. 15.).

also in dem $\triangle$LgG ist die Senne gG $>$ Lg (§445);

und der Bogen gG ist $>$ als die Senne gG (§399):

also ist der Bogen gG $>$ Lg (§. 46.)

also ist (Ag + gG) oder Ag $>$ Lg + Ag (§. 44.)

AG $=$ GH und Ag $=$ gh (I)

also ist GH $>$ (Lg + gh) oder Lh (§. 15.).

Wir setzen GH sey mit Lh parallel:

also ist LGHh kein Parallelogramm (§. 423.):

und es ist nicht hH mit LG, oder TV mit AG parallel (§. 421.); sondern, weil LH kleiner ist als GH, so neigt sich die Linie VT gegen AG, und wird der Winkel, da sie zusammen kämen, wenn man sie lange genug machte, ober GH seyn.

So lange also TV die Radlinie schneidet, (so lange nämlich hH nicht ganz verschwindet, das ist, so lange TV nicht die Tangente in H wird) so lange kann sie mit AG nicht parallel werden. Setzen wir aber es steige die Linie Lh an gH herunter, und bleibe mit GH parallel, so wird Lg immer kleiner, und die Linie Lh immer der Linie GH

gleicher, und die Linie TH kömmt immer näher zur parallelen Stellung mit AG, je näher h zu H kömmt, bis endlich, da h in H, und g in G fällt, Lg, und das ganze Dreyeck LgG, und die Senne hH völlig verschwindet; und gh = Gh, und TV mit AG völlig parallel wird: da sie dann in diesem Falle die Tangente in H ist (§. 473.), so sehen wir, daß diese mit der Senne AG parallel sey.

L. §. 768. Der Cycloidische Bogen *AH* ist noch so groß als die Senne des Zeugungszirkels *AG* zwischen der Scheitel *A*, und Halbordinate *GH*.

I.

B. Setzen wir, es seyn zwo Halbordinaten gh, und GH einander unendlich nahe, und also die Bögen gG und hH unendlich klein (daß sie also für gerade Linien gelten können), und es werde mit dem Strale Ag ein kleiner Bogen gu beschrieben; diesen, weil er unendlich klein ist, können wir für eine gerade Linie, oder den Sinus selbst dieses Bogens gelten lassen (§. 460.), der auf Au (§. 436.), und also auch auf LG senkrecht ist.

II.

Nun ist $AG = Ag + gG$ (§. 16.).

gG unendlich klein. Nach der Setzung.

also ist $AG = Ag$ (§. 234.):

folglich $\frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}Ag$ (§. 51.).

$\frac{1}{2}Ad = \frac{1}{2}Ag$ (§. 767. in dem Beweise II.).

also ist $\frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}Ad$ (§. 43.)

$\frac{1}{2}gG$ unendlich klein.

also $\frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(Ad+gG)$ (§. 234.).

$\frac{1}{2}(Ad+gG)$ ist das Maaß von gLG (§447):

also $\frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}Ag$ ist das Maaß von gLG (§15).

III.

III.

Der Winkel AGg an der Peripherie steht auf Ag.

folglich $\frac{1}{2}$ Ag ist das Maaß von AGg (§. 448.)
$\frac{1}{2}$ Ag ist das Maaß von gLG (II)

also ist der Winkel gLG = gGA oder gGL (§294)

also das Dreyeck gLG ist gleichschenkelicht (§352).
gu ist senkrecht auf die Grundlinie LG (I):

folglich Lu = uG (§. 349.);

und 2uG = Lu + uG (§. 45.) = Lg (§. 16.).

IV.

LV ist parallel mit hH (§. 767.).
Lh ist parallel mit GH. Nach der Se-

folglich ist LGHh ein Parallelogramm (§421) zung.

also ist Lg = Hh (§. 423.).
LG = 2uG (III)

also hH = 2uG (§. 43.).

V.

AG = Au + uG (§. 16.)

AG − Au = uG (§. 47.)
Ag = Au (§. 271.)

AG − Ag = uG (§. 43.)

das ist: der kleine Bogen hH zwischen den unendlich nahen Halbordinaten ist noch so groß als die Differenz zwischen den Sennen AG und Ag. Nun bilde man sich ein der elliptische Bogen AH werde in lauter solche kleine Bögen mit parallelen Halbordinaten zerschnitten; so werden immer die unendlich kleinen Bögelchen der Radlinie noch so groß

seyn,

seyn, als die Differenzen der zwo Sennen im Zeugzirkel, die ihnen respondieren. Es wird zum Beyspiele h'h noch so groß seyn, als g'u' oder als uh = gu.

Nun besteht die Senne GA aus lauter solchen Differenzen gu, uu' ꝛc. und der Bogen AH der Radlinie aus lauter kleinen Bögelchen Hh, hh' ꝛc.: also ist der ganze Bogen AH noch so groß, als die ganze AG.

Z. §. 769. Also ist die halbe Radlinie noch so groß als der Durchmesser des Zeugzirkels, und die ganze Radlinie macht 4 solche Durchmesser aus; sie verhält sich also zur Peripherie des Zirkels beynahe wie 40000 : 31416 (§. 464.), oder wie 113×4 : 355 = 452 : 355, und in kleinern Zahlen, wie 14 : 11.

§. 770. Dieses sind die geometrischen Haupteigenschaften der Radlinie, aus denen man in der Mechanik andere herleitet, als daß sie jene krumme Linie sey, in der ein beweglicher schwerer Körper z. B. eine Kugel am schnellesten von einem gegebnen Orte an ein anders gegebnes sich von seiner Schwere getrieben herabwälzt, und daß jede Bögen, wenn die Bewegung von ihrem Anfange geschieht, von darinnen beweglichen schweren Körpern in gleicher Zeit durchlaufen werden. Es ist auch zu merken, daß der Krümmungsstral an der Scheitel der Radlinie viermal so groß sey, als der Stral des Zeugzirkels, und daß ein ziemlich großer mit diesem Krümmungsstral beschriebener Bogen, sehr nahe zur Radlinie komme, und fast gar darein falle, wie man es auch in der Figur bemerken kann, da ich die Radlinie DAE innerhalb diesem Zirkelbogen ZAX, durch Hilfe der Halbordinaten und dazugehörigen Abscissen (§. 764.) beschrieben habe.

Wir setzen auch hier noch eine kleine Abhandlung von der Differenzial- und Integralrechnung bey, welche in der lateinischen Ausgabe mangelt: denn obwohl sie ein Anfänger zu seiner Physik nicht lediglich nothwendig hat, so wird sie ihm doch, wegen ihrer Wichtigkeit und Schönheit nicht unangenehm seyn.

VI. Von der Differenzial- und Integralrechnung.

1.) Von der Differenzialrechnung, und ihrem Gebrauche.

§. 771. Wenn der Unterschied zwoer endlichen E. Größen unendlich klein ist, so nennt man ihn das Differenziale derselben. Und wenn eine endliche Größe um ein Unendlichkleines wächst, oder abnimmt, so heißt man dieses Unendlichkleinefinden die Größe Differenziern. Das Differenziale deutet man durch den Buchstab d an, den man vor dem setzt, welchen die endliche Größe, die man differenzieret, andeutet: vor dem d setzt man +, wenn die Größe wächst; und —, wenn sie abnimmt.

z. B. Es fließe eine Halbordinate, die bey dem Ursprunge der Abscissen A unendlich klein ist, von A gen P herunter: sie wachse dabey immer, wie sie wachsen muß, F. 103 um eine Parabel zu beschreiben (§. 650.); sie komme in P, und erlange die Länge PM; es sey aber Pp unendlich klein; so ist auch der Unterschied zwischen pm und PM, um den sie im Laufe von PM in pm gewachsen ist, unendlich klein: man deute aber die Halbordinate PM durch y an, so wird rm (der Unterschied zwischen PM und pm) durch dy angedeutet, und diesen Unterschied finden, oder recht ausdrücken heißt die Halbordinate y differenzieren. Eben so wenn die Abscisse Ap durch x gegeben wird, wird Pp durch dx vorgestellt. Wachsen nun diese Größen, so schreibt man + dx, und + dy; nehmen sie aber ab, so drückt man sie mit — dx und — dy aus.

§. 772. Weil bey Erzeugung einer Größe durch Z. das Fortfließen einer andern nicht alle Größen wachsen oder abnehmen, so haben auch nicht alle eine Differenziale, sondern nur die Veränderlichen.

z. B. Wenn eine Ordinate eines Zirkels an seinem Durchmesser herunter fließt, so wachsen zwar die Ordinaten mit den Abscissen bis halben Weg, und nehmen darnach wieder ab, da die Abscissen zu wachsen forttahren, aber der Durchmesser bleibt unverändert, folglich hat er kein Differenziale. Und weil man die beständigen Größen mit den ersten Buchstaben des Alphabets andeutet, so sieht man wohl, daß man sie nicht differenzieren kann, also z. B. da ist $= o$; und d (ax) ist adx. Man kann sich zu Erläuterung dieses Satzes der 101 Figur bedienen: es bedeute AB eine beständige Linie, die wir wollen a heißen; und wir wollen setzen, sie fließe an einer andern AG herF. unter um ein Parallelogramm zu gestalten, ein Punct der 101 von A in G herunter fließt, gestaltet eine Linie, die, bis er dahin kömmt, immer wächst; diese wollen wir x heißen; nun sey dieser Punct schon in C gekommen, und CE sey unendlich klein: so ist $CE = dx$, wenn $AC = x$ ist, und CDEF ist $=$ adx.

B. §. 773. Wenn man eine Größe von mehrern Theilen die mit den Zeichen + oder — zusammen hangen, differenzieren soll, so differenzieret man jede insonderheit, und wenn die Größen wachsen, bleiben die Zeichen; wenn sie aber abnehmen, werden diese in widrige verändert.

z. B. $d(x+y+a)$ ist $= dx+dy$, und $d(x-y)$ ist $= dx-dy$: aber $-d(x+y+a)$ ist $= -dx-dy$ und $-d(x-y)$ ist $= -dx+dy$.

E. §. 774. Wenn man ein Differenziale wieder differenzieret, so heißt das, was heraus kömmt, ein Differentiodifferenziale, oder ein Differenziale des zweyten Grades, und wird mit zwey d angedeutet. Die Berechnungen aber der Differenzialen des zweyten Grades heißt man Differenziodifferenzialrechnungen.

z. B. Das Differenziale von dx oder dxdx deutet man mit ddx oder d^2x an. Und wenn man dieses wieder differenzieret, so nennt man dddx oder d^3x ein Differenziale des dritten Grades und so weiter.

§. 775.

§. 775. Gleichwie ein Differenziale vom ersten Grade in Vergleich einer endlichen Größe verschwindet (§. 233.), daß also $x+dx=x$ ist, so verschwindet auch ein Differenziale vom zweyten Grade in Vergleich eines von dem ersten, also daß z. B. $dx+d^2x=dx$ ist. Und weil eine unendlich kleine Größe endliche mal genommen doch noch keine endliche Größe wird, so verschwinden auch die Producte aus den Differenzialien in endliche Größen, und ist z. B. $x+xdx=x$; und eben so verschwindet ein Product aus einem Differenziale vom zweyten Grade in eine endliche Größe im Vergleich eines Differenziales vom ersten Grade: also ist z. B. $dx+ad^2x=dx$. Es verschwindet aber auch ein Quadrat eines Differenziales selbst: weil man das Differenziale als einen Bruch anzusehen hat, dessen Nenner unendlich, und also sein Quadrat unendlich mal kleiner als die Wurzel (§. 82.), und also gegen sie für nichts zu achten ist (§. 239.). Also ist $dx+dxdx$, oder, wie man es zu schreiben pflegt, $dx+dx^2=dx$; und eben so verschwindet ein Product aus zweyen Differenzialen in Vergleich der simplen Differenzialen. B.

§. 776. Man merke sich den Unterschied zwischen d^2x und dx^2. Das letzte nämlich dx^2 bedeutet das Quadrat von dx, wie wir eben gemeldet haben. d^2x aber bedeutet das Differentio Differentiale von x, oder sein Differentiale vom zweyten Grade. Es sind zwar beyde d^2x und dx^2 für sich selbst Differenzialien vom zweyten Grade, aber nur das erste ist der Quantität x ihr Differenziale vom zweyten Grade.

§. 777. Ein Product aus mehr veränderlichen Factoren z. B. *axy* zu differenzieren. A.

Multiplicieret das Differenziale einer veränderlichen Größe mit den übrigen Größen, so giebt das Product das gesuchte Differenziale. a.

Also

Also z. B. weil dx das Differenziale von x, und dy das Differenziale von y ist, so ist $d(xy) = ydx + xdy$. Und so ist auch $d(axy) = axdy + aydx$.

§. Denn weil dx das Differenziale von y ist, so werden die um ihre Differenzialen vermehrten Factoren $x+dx$, $y+dy$ seyn, derer Product $xy+ydx+xdy+dxdy$ ist, dessen letzter Theil in Vergleich der andern verschwindet (§. 775. und §. 219.); der erste aber xy das Product der veränderlichen Größen ineinander selbst ist: also bleibt mir noch ydx, und xdy übrig das Wachsthum des Productes der um ihre Differenzialen vermehrten Factoren auszudrücken.

Man kann sich zweene Factoren x und y als zwo Seiten AB, und BD eines Rectangels ABCD vorstellen: F. 102 setzen wir nun beyde Seiten wachsen, $AB = x$ um das Differenziale $BF = dx$, und $DB = y$ um das Differenziale $BH = dy$: so giebt $AF \times DH$, oder $LG \times GE$ das vermehrte Rectangel LGEC; es besteht aber dieses, aus dem Vorigen ABDC oder $AB + BD = xy$, aus den neuen Rectangeln $ABLH = AB \times BH = xdy$, und $DB\,FE = DB \times BF = ydx$, und dem kleinen Theile $BHGF = BH \times BF = dydx$: die letzten drey Stücke machen den Unterschied, und der letzte aus ihnen ist im Vergleiche der zwey andern unendlich klein, und also für nichts zu achten.

§. 778. Es ist also 1. $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$.

2. $d(abx) = abdx$.

3. $d(ax - by) = adx - bdy$.

4. $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$.

5. $d(x^3) = xdx + xdx + xdx = 3xdx$.

6. Ueberhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$.

7. $d\frac{1}{x^m}$ oder $d(x^{-m})$ (§. 139.) $= -mx^{-m-1}dx$.

8. $d\sqrt[n]{x^m}$ oder $dx^{\frac{m}{n}}$ (§141) $= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}dx$

§. 779. Das Differenziale eines Quotienten z. B. x : y zu finden.

Es sey $xy = t$, so ist $x = ty$ A.
und $dx = tdy + ydt$ (§. 777.) B.

also $dx - tdy = ydt$

oder $dx - \frac{xdy}{y} = ydt$. Im ersten Gliede $\frac{x}{y}$ für t substituiert.

$ydx - xdy = y^2 dt$ mit y multipliciert.

also $\frac{ydx - xdy}{y^2} = dt$

das ist: wenn man das Differenziale des Quotienten $x : y$ finden will, so

1. Multipliciere man das Differenziale des Dividendus dx mit dem Divisor y, und das Differenziale des Divisors dy mit dem Dividendus dx.

2. Das letztere Product ziehe man von dem erstern ab.

3. Und dividiere die Differenz $ydx - xdy$ mit dem Quadrate des Divisors y^2.

§. 780. Also ist 1. $d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{adx}{x^2}$ 8.

2. $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}$

3. $d\left(\frac{x}{a+x}\right) = \frac{adx}{a^2+2ax+x^2}$

4. $d\left(\frac{ax-xy}{bz}\right) = \frac{abzdx - bxzdy - byzdx - abxdz + bxydz}{bbzz}$

§. 781. Der Gebrauch der Differenzialrechnung ist sehr weitläufig: wir wollen davon nur ein Beyspiel in der Weise das Größte und Kleinste zu finden zeigen.

§. 782.

A. §. 782. Allgemeine Differenzialformeln für unendlich kleine Bögen, Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien zu allen krummen Linien zu finden.

a. Es sey Mm ein unendlich kleiner Bogen einer B. krummen Linie AB, MT die Tangente in M (§. F. 472.): also PT die Subtangente, ML die Nor- 103 mal- und PL die Subnormallinie (§. 640.); die Ordinate pm sey der Ordinate PM unendlich nahe, und man ziehe Mr parallel mit AL; so ist MPpr ein Parallelogramm (§. 521.), und MP = rp, Mr = Pp (§. 423.), mr die Differenz zwischen mp und rp oder zwischen mp und MP (§. 15.), und Mr = Pp der Differenz zwischen AP und Ap: folglich ist

der Abscisse AP Differenziale $dx = Mr$
der Ordinate PM Differenziale $dy = mr$

Weil nun $Mm^2 = mr^2 + Mr^2 = dx^2 + dy^2$ (§. 394.).

I. So ist des Bogens AM Differenziale $Mm = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

Es ist aber, weil Mr parallel mit Tp ist, das Dreyeck Mmr dem Dreyecke Tmp, und dieses, weil MP parallel mit mp ist, dem Dreyecke TMP, und also auch Mmr ähnlich, folglich ist

II. $rm : Mm = MP : MT$ also $MT = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}$
$dy : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = y : MT$

III. $rm : rM = MP : PT$ also $PT = \frac{ydx}{dy}$
$dy : dx = y : PT$

Es ist auch das Dreyeck PMT dem Dreyecke PLM (§. 391.), und also auch dem Dreyecke rmM ähnlich, und also

IV.

IV. Mr : Mm = MP : ML, also $ML = \frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$
dx : $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ = y : ML

V. Mr : rm = MP : PL, also $PL = \frac{ydy}{dx}$
dx : dy = y : PL

§. 783. Einer bestimmten krummen Linie u. ihr Element oder den unendlich kleinen Bogen *Mm*, ihre Tangente, Subtangente, Normal- und Subnormallinie für jeden gegebnen Punct *M* durch die Differenzialrechnung zu finden.

1. Differenzieret die Gleichung der gegebnen a. krummen Linie, und bestimmet daraus den Werth von dx und dy.

z. B. die Gleichung der Parabel ist $y^2 = ax$ (§. 652.)
das Differenziale davon ist $2ydy = adx$ (§. 778. 4. §. 772.)

also ist $\frac{2ydy}{a} = dx$

und $dy = \frac{adx}{2y}$ ($\frac{2y}{a}$ Divisor)

2. Diese Werthe substituieret in den allgemeinen erst (§. 782.) angeführten Differenzialformeln für die unendlich kleinen Bögen Mm, Tangenten ꝛc., so könnt ihr sie selbst dadurch finden.

Wir wollen z. B. die Subtangente und Subnormallinie der Parabel finden: so ist für die Subtangente PT die

allgemeine Formel.	Für die Parabel.
$\frac{ydx}{dy}$	$\frac{y2ydy}{ady} = \frac{2y^2}{a}$
	$\frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$

ax für y^2

das ist, die Subtangente für einen Punct der Parabel ist jederzeit noch so groß als die respondierende Abscisse.

Für

Für die Subnormallinie PL,

allgemeine Formel: $\frac{ydy}{dx}$

In der Parabel. $\frac{yadx}{2ydx} = \frac{a}{2}$

das ist: die Subnormallinie für jeden Punct der Parabel ist immer dem halben Parameter gleich.

A. §. 784. Aus der gegebenen Gleichung einer krummen Linie die Abscisse zu bestimmen, zu der jene Ordinate oder Halbordinate gehört, welche die kleinste oder grösste aus allen ist, wenn es je eine solche giebt, und selbst auch ihre Grösse anzugeben.

A. 1. Differenzieret die gegebne Gleichung, und setzet $dy = 0$, und auch $= \infty$; suchet darnach in beyden Fällen den Werth von x: wenn sich keiner ergiebt, so giebt es keine Ordinate, die unter allen die grösste wäre, sondern sie wachsen unendlich fort; noch eine kleinste, denn sie fangen von der Scheitel gleichsam von o an.

2. Ergiebt sich aber in einem dieser zwo Setzungen oder in beyden ein Werth von x, so suchet aus der Gleichung den Wert von y, und dieser wird entweder die grösste oder die kleinste Ordinate seyn.

3. Ob aber nun selbe die kleinste oder die grösste sey, wird man gemeiniglich leicht aus der Beschaffenheit der gegebnen krummen Linie, wenn sie schon bekannt ist, abnehmen: solltet ihr aber noch zweifeln, so vermehrt ein wenig den Werth von x, und suchet wieder die respondierende Ordinate: wächst sie durch diese Aenderung, so war sie zuvor die kleinste; nimmt sie aber jetzt ab, so war sie die grösste.

Wenn

Wenn eine krumme Linie ACB oder AcB (FF. 104. 105. 106. 107.) eine größte CQ (FF. 104. 106.) oder kleinste Ordinate oder Halbordinate cq (FF. 105. 107.) hat, so werden ihre Ordinaten oder Halbordinaten eine Weile immer wachsen, oder immer abnehmen, bis endlich die Tangente MT mit der Abscissenlinie RP entweder parallel (FF. 104. 105.) oder auf sie senkrecht wird (FF. 106. 107.).

Nun ist in allen diesen vier Figuren

$$\triangle Mmr \backsim \triangle TMP,$$

und also $PT : MP = Mr : mr = dx : dy$

1. Wird aber MT parallel mit RP (welches sich bey den Figuren 104. und 105. ereignet, wenn M in C oder c fällt, das ist, wenn MT die Tangente für CQ die größte oder cq die kleinste Ordinate ist), so verschwindet der Winkel T, es wird MP gegen PT, und mr gegen Mr unendlich klein; und also $dy = 0$ oder dx gegen dy $= \infty$: so bald also dieses geschieht, hat man die größte CQ, oder die kleinste Ordinate cq.

2. Wird MT auf RP senkrecht (welches sich bey den Figuren 106. und 107. ereignet, wenn M in C oder c fällt, das ist, wenn die Tangente MT die größte CQ, oder kleinste cq Ordinate decket) so verschwindet der Winkel M, und es wird TP gegen MP, und also Mr gegen mr unendlich klein; folglich $dx = 0$, oder dy gegen $dx = \infty$: also auch in diesem Falle kömmt man zur größten CQ, oder kleinsten Ordinate cq.

§. 785. Wir wollen zum Beyspiele die größte Halbordinate des Zirkels suchen:

Seine

Seine Gleichung ist $y^2 = ax - x^2$ (§. 648.),
dieser ihr Differentiale $2ydy = adx - 2xdx$ (§778.4.§772)

also ist $dy = (adx - 2xdx) : 2y$

setzen wir $dy = 0$; so ist $0 = (adx - 2xdx) : 2y$

also auch $2yx0 = 0 = adx - 2xdx$

folglich $2xdx = adx$

also $2x = a$

$x = a : 2$

das ist, die größte Halbordinate respondieret dem halben Diameter.

A. §. 786. Eine gerade Linie in zweene Theile zu schneiden, derer Product oder Rectangel unter allen das größte sey.

a. Nennen wir die ganze Linie a, einen Theil
B. derselben x, und also den andern $a - x$; so muß $ax - x^2$ das größte Rectangel werden, das aus x und $a - x$ entstehen kann: es ist aber bekannt, daß $ax - x^2 = y^2$ die Gleichung des Zirkels sey. Da wir nun eben jetzt gefunden haben, daß im Zirkel die größte Halbordinate dem halben Diameter respondiere, so ist diese Aufgabe schon aufgelöset, y nämlich, und also auch $y^2 = ax - x^2$ ist am größten, wenn $x = \frac{1}{2}a$ ist.

§. 787. Die Auflösung dieser Aufgabe hat wirklich in der Baukunst und bey andern Gelegenheiten ihren Nutzen. Denn setzen wir, es soll ein Haus auf freyem Felde erbauet werden, so ist klar, daß die äußersten Seiten desselben, weil sie der Witterung ausgesetzt sind, vieles davon zu leiden haben, sie bedürfen auch dieserwegen am öftesten einer Reparation, oder wenigst eines neuen Anwurfes: ist es nicht vortheilhaft bey gleicher Fähigkeit des Hauses seine äußerste Seiten so klein zu haben, als immer möglich ist, in welchem Falle auch der Bau weniger kostbar wird? Nun schickt sich Bequemlichkeit halber zur Grundfläche eines Hauses keine andere Figur als ein rechtwinkelichtes

lichtes Viereck, und weil unter diesen bey gleichem Umfange, wie wir jetzt gesehen haben, das Quadrat das fähigste ist; so ist eben diese Grundfläche die Seiten des Hauses bey nämlicher Fähigkeit desselben so klein zu haben, als immer möglich ist, die tauglichste. Eben so ist diese Grundfläche für Geschirre, derer Gestalt eiu Parallelepipedum ist, um ihre Oberfläche bey gleicher Fähigkeit so klein, und so wenig kostbar zu haben, als möglich ist, die beßte. Für ein Geschirr aber von der kleinsten äußern Oberfläche in Gestalt eines Parallelepipedums, das aber offen ist, finde ich, daß man die Grundfläche ein Quadrat seyn lassen, und die Höhe halb so groß machen soll, als eine Seite dieses Quadrates ist.

Es ist aber überhaupt der Nutzen, und der Gebrauch der Differenzialrechnung ungemein viel weitschichtiger, als daß er sich in diesem kleinen Werke entwickeln lasse. So müssen wir auch Kürze halber die Differenziodifferenzial- und Exponentialrechnung (damit man nämlich Größen mit veränderlichen Exponenten als a^x, y^x ꝛc. differenzieret oder integrieret ꝛc.) völlig übergehen Nur von der Integralrechnung wollen wir noch das leichteste, und etwas Weniges von deren Gebrauche anführen.

2.) Von der Integralrechnung, und ihrem Gebrauche.

§. 788. Die Größe, durch deren Differenzierung ein Differenziale entstanden ist, heißt man das Integrale davon: und Integrieren ist so viel als aus dem gegebnem Differentiale einer Größe ihr Integrale finden. Man drückt das Integrale durch den vor das Differenziale gesetzten Buchstaben S aus. E.

z. B. Weil dx das Differenziale von x ist; so ist x das Integrale von dx, und also $Sdx = x$.

Man heißt das Integrieren auch Summieren: denn man betrachtet die endliche Größe als die Summe von unendlich vielen Differenzialen: und daher kömmt es, daß

man das Integrale auch die Summe heißt, und durch S ausdrückt.

A. §. 789. Eine gegebene Differenzialgröße zu integrieren.

a. 1. Vergleichet das gegebene Differenziale mit den folgenden Formeln, so werdet ihr bald sehen, aus was für veränderlichen Größen selbes entstanden sey; nun selbe sind ihr Integrale, außer den beständigen Größen, die beym Differenzieren verschwunden sind.

I. $Sdx = x$ (§. 771.)

II. $\begin{cases} S(dx+dy) = x+y \\ S(dx-dy) = x-y \end{cases}$ (§. 773.)

III. $S(xdy+ydx) = xy$ (§. 777.)

IV. $S(mx^{m-1}dx) = x^m$ (§. 778. 6.)

V. $S(n:mx^{(n-m):m}dx) = x^{n:m}$ (§. 778. 8.)

VI. $S.\frac{(ydx-xdy)}{y^2} = x:y$ (§. 779.).

2. Die beständigen Größen, wenn sie auch schon vorhin aus der Gleichung bekannt sind, setzet auch noch hinzu, wenn es euch aber noch unbekannt ist, ob eine veränderliche Größe beyzusetzen sey, oder nicht; so setzet in dem gefundenen Integrale die veränderliche Größe $= 0$, und sehet ob also das Integrale selbst verschwinde, oder ob ein Werth desselben sich annoch ergebe; im ersten Falle hat man nichts mehr zu den gefunden veränderlichen Größen beyzusetzen; im andern Falle aber deutet man die beständige Größe, die noch dazu kommen soll, immer durch den Buchstaben C an, den man mit widrigen Zeichen zu den gefundenen veränderlichen Größen hinsetzt.

§. 790. Den Beweis dieser zweyten Regel unterlasse ich hier zu geben, denn es ist meine Absicht nicht, mich hier in die Integralrechnungen, und ihren Gebrauch weit einzulassen, sondern nur einigen Begriff davon den Anfängern beyzubringen, dazu erklecken neben dem Wenigen, was wir hier davon gesagt haben, nachfolgende wenige Aufgaben. Wer weiter gehen will, muß sich dazu besondere Bücher anschaffen.

§. 791. Wenn eine veränderliche Linie pm an einer andern Ap herunter fließt, und also eine Fläche Apm beschreibt, so kann man sich diese Fläche vorstellen, als ob sie aus unendlich vielen, unendlich schmalen Streifen bestünde, derer jede zwischen zwoen einander unendlich nahen Ordinaten oder Halbordinaten PM und pm enthalten sey. Nun eine einzige solche Streife PMmp heißt das Element oder Integrale der Fläche Apm; und die Summe aller dieser Elemente finden heißt die Fläche quadrieren. E. F. 103

§. 792. Die Elemente der Flächen werden recht durch ydx ausgedrückt. L.

Denn weil Pp unendlich klein ist, so wächst auch die Linie, welche die Fläche beschreibet, bis sie aus PMm in pm kömmt, unendlich wenig; und ist also PM = pr = pm, weil rm verschwindet (§233); und also ist PMrp = PMmp: giebt man nun Ap durch x, so muß Pp durch dx ausgedrückt werden (§. 771.); und also ist PMrp oder Pp × PM = dx × y = ydx, folglich ist dieses der ächte Ausdruck des Elements. B.

§. 793. Da dann die Fläche Apm die Summe aller Elemente ist, so muß sie durch $Sydx$ gegeben werden (§. 788.), und darf man also, wenn man eine Fläche quadrieren will, nur aus 3.

der Gleichung derselben den Werth von ydx substituieren, und wenn es thunlich ist, integrieren, so ist der Fläche Apm Innhalt gefunden.

A. §. 794. Die Parabel zu quadrieren.

a. Suchet aus ihrer Gleichung den Werth von Sydx, so ist sie quadrieret. Es ist aber in der Parabel

$$y = \sqrt{ax} \text{ (§. 653.)} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \text{ (§. 141.)}$$

also ist $ydx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$

und $Sydx = \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ (§. 789. IV.) $= \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$

Denn nach der Formel $S(mx^{m-1}dx) = x^m$ muß

1. das Differenziale dx beym Integrieren wegkommen.

2. Der Exponent der veränderlichen Größe um Eins vermehrt werden, und also aus $x^{\frac{1}{2}}$ wird $x^{\frac{1}{2}+1}$.

3. Muß die ganze Function $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}$ mit dem um Eins vermehrten Exponenten, also hier mit $\frac{1}{2}+1$ oder mit $\frac{3}{2}$ dividieret, oder mit $\frac{2}{3}$ multiplicieret werden (§. 85. §. 87.). Es ist nämlich m in der allgemeinen Formel hier $= \frac{3}{2}$.

Nun ist $x^{3:2} = x^{2:2} \times x^{1:2} = x^1 \times x^{1:2}$ (§. 137) $= x^{1:2} x$

also ist $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x$.

Weil dann $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ ist, so haben wir

$$Sydx = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} yx.$$

Um noch zu sehen, ob nicht bey dieser Integration eine beständige Größe müsse beygesetzt werden, setzet $x = 0$, so ist auch $\frac{2}{3} yx = 0$, also $C = 0$; folglich ist nichts beyzusetzen, und $\frac{2}{3} yx$ ist das

ganze

ganze gesuchte Integrale. Also ist $APM = \frac{2}{3}$ von dem Parallelogramme aus der Abscisse x in die Halbordinate y, und verhält sich zu selbem wie 2 : 3.

§. 795. Wenn sich eine endliche Fläche, die E. wenigst auf einer Seite mit einer geraden Linie begränzet ist, um selbe als eine Achse herum bewegt, so beschreibet sie einen runden Körper, der sich durch parallele flache Durchschnitte in lauter runde Scheibchen zertheilen läßt, und darum auch aus lauter solchen unendlich vielen und unendlich dünnen Scheibchen zusammengesetzt kann betrachtet werden, deren jedes zwischen zweenen einander unendlich nahen Zirkeln eingeschlossen sey. Nun ein solches Scheibchen, welches entsteht, wenn das Parallelogramm PMmp zwischen den unendlich nahen Halbordinaten PM pm, sich um die unendlich kleine Seite Pp herum dreht, heißt man das **Element oder Differenziale des runden Körpers**, der aus solchen Scheibchen besteht, die man weil PM = pm ist (§. 792.), als unendlich niedere Cylinder anzusehen hat, derer runde Oberfläche von der Seite Mm in Herumdrehung der Parallelogramme PMmp beschrieben wird, die runde Oberfläche aber eines solchen cylindrischen Scheibchens heißt man das **Element oder Differenziale der Oberfläche des runden Körpers** der aus diesen Scheibchen zusammengesetzt ist.

§. 796. Weil Mm das Element der krummen Z. Linie durch deren Herumwälzung die Oberfläche des runden Körpers beschrieben wird, $= \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ist, so haben wir dieses durch die Peripherie des mit dem Strale PM beschriebnen Zirkels zu multiplicieren um das Differenziale der Oberfläche zu erhalten (§. 545.): nun drucken wir die Verhältniß der

Peri-

Peripherie des Zirkels zu seinem Strale durch $\frac{p}{x}$ aus, so ist die mit dem Strale PM = y beschriebene Peripherie $\frac{Py}{r}$ (§. 465.); folglich das Differenziale der Oberfläche aller runder Körper, die durch Umdrehung einer zeugenden Fläche um eine ihre Seite entstehen, $= \frac{Py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, und wenn man aus der gegebnen Gleichung einer krummen Linie die Werthe von dy^2 oder dx^2 in dieser Formel substituiert, und darnach die Formel integriert, so erhält man den Innhalt der runden Oberfläche $= S\frac{Py}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

B. §. 797. Will man eine krumme Linie rectificieren, das ist, ihre Länge finden, oder die Länge einer geraden Linie bestimmen, die der gegebnen krummen gleich ist, so darf man nur in dem Differenziale aller krummen Linien $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ aus der Gleichung der gegebnen die Werthe von dx^2 oder dy^2 an dieser ihre Stelle setzen, und darnach die Formel integrieren, so wird sich daraus die Rectification ergeben.

B. §. 798. Da das Element eines runden Körpers das cylindrische Scheibchen ist, dessen circuläre Grundfläche mit der Halbordinate als einem Strale beschrieben wird; folglich $\frac{Py}{r} \times \frac{y}{2}$ (§. 498) $= \frac{Py^2}{2r}$, und die Höhe $Mr = dx$ ist; so ist dieses Element $= \frac{Py^2dx}{2r}$, und also die Integralformel

aller

aller solcher Körper $S\frac{Py^2dx}{2r}$: man darf also nur aus der besondern Gleichung der gegebnen Linie, welche die zeugende Figur begränzet, den Werth von y^2 in dem Elemente bestimmen, und die Formel alsdann integrieren, so erhält man den gesuchten Innhalt eines solchen runden Körpers. Also z.B.

§. 799. Den körperlichen Innhalt eines sphärischen Segments zu finden, welches nämlich beschrieben wird, wenn sich ein halbes Zirkelsegment *APM* um *AP* herum bewegt. A. F. 84

Wenn wir den halben Durchmesser der Kugel $= r$ setzen, so wird die Gleichung des Zirkels $ax - x^2 = y^2$ (§. 648.) in diese $2rx - x^2 = y^2$ verändert, folglich ist a. B.

$$\frac{Py^2dx}{2r} = \frac{(2prx - px^2)}{2r}dx = \frac{2prxdx - px^2dx}{2r}$$

also ist $S\frac{py^2dx}{2r} = \frac{2prx^2}{4r} - \frac{px^3}{6r}$ (§. 789. IV.)

$$= \tfrac{1}{2}px^2 - \frac{px^3}{6r}.$$

§. 800. Wenn man den körperlichen Innhalt der ganzen Kugel sucht, so wird $x = 2r$, und also $x^2 = 4r^2$, $\frac{1}{2}px^2 = 2pr^2$, x^3 aber $= 8r^3$ und $\frac{px^3}{6r} = \frac{8pr^3}{6r} = \frac{8pr^2}{6}$: folglich die ganze Kugel $= S\frac{py^2dx}{2r} = 2pr^2 - \frac{8pr^2}{6} = \frac{12pr^2 - 8pr^2}{6} = \frac{4pr^2}{6}$ $= \frac{2}{3}pr^2$. Eines Cylinders Innhalt aber der gleiche B.

cke Höhe, und gleichen Durchmesser mit der Kugel $= 2r$ hat, ist $= \frac{1}{2} rp \times 2r = pr^2$ (§. 536.); denn seine Grundfläche ist $= \frac{1}{2} rp$ (§. 489.); also verhält sich die Kugel zu diesem Cylinder wie $\frac{2}{3} pr^2 : pr^2 = \frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$, eben so, wie wir es in der gemeinen Geometrie §. 577. gefunden haben.

Ingolstadt,
gedruckt bey Johann Ferdinand Lutzenberger,
Universitätsbuchdrucker.

Logarithmen der Zahlen.

Z.	Log.	Z.	Log.	Z.	Log.	Z.	Lo
1	0.0000	38	1.5798	75	1.8751	112	2.0
2	0.3010	39	1.5911	76	1.8808	113	2.0
3	0.4771	40	1.6021	77	1.8865	114	2.0
4	0.6021	41	1.6128	78	1.8921	115	2.0
5	0.6990	42	1.6232	79	1.8976	116	2.0
6	0.7782	43	1.6335	80	1.9031	117	2.0
7	0.8451	44	1.6435	81	1.9085	118	2.0
8	0.9031	45	1.6532	82	1.9138	119	2.0
9	0.9542	46	1.6628	83	1.9191	120	2.0
10	1.0000	47	1.6721	84	1.9243	121	2.0
11	1.0414	48	1.6812	85	1.9294	122	2.0
12	1.0792	49	1.6902	86	1.9345	123	2.0
13	1.1139	50	1.6990	87	1.9395	124	2.0
14	1.1461	51	1.7076	88	1.9445	125	2.0
15	1.1761	52	1.7160	89	1.9494	126	2.1
16	1.2041	53	1.7243	90	1.9542	127	2.1
17	1.2304	54	1.7324	91	1.9590	128	2.1
18	1.2553	55	1.7404	92	1.9648	129	2.1
19	1.2788	56	1.7482	93	1.9685	130	2.1
20	1.3010	57	1.7559	94	1.9731	131	2.1
21	1.3222	58	1.7634	95	1.9777	132	2.1
22	1.3424	59	1.7709	96	1.9823	133	2.1
23	1.3617	60	1.7782	97	1.9868	134	2.1
24	1.3802	61	1.7853	98	1.9912	135	2.1
25	1.3979	62	1.7924	99	1.9956	136	2.1
26	1.4150	63	1.7993	100	2.0000	137	2.1
27	1.4314	64	1.8062	101	2.0043	138	2.1
28	1.4472	65	1.8129	102	2.0086	139	2.1
29	1.4624	66	1.8195	103	2.0128	140	2.1
30	1.4771	67	1.8261	104	2.0170	141	2.1
31	1.4914	68	1.8325	105	2.0212	142	2.1
32	1.5052	69	1.8388	106	2.0253	143	2.1
33	1.5185	70	1.8451	107	2.0294	144	2.1
34	1.5315	71	1.8513	108	2.0334	145	2.1
35	1.5441	72	1.8573	109	2.0374	146	2.1
36	1.5563	73	1.8633	110	2.0414	147	2.1
37	1.5682	74	1.8692	111	2.0453	148	2.1

g.	S.	Log.
492	149	2.1732
531	150	2.1761
569	151	2.1790
607	152	2.1818
645	153	2.1847
682	154	2.1875
719	155	2.1903
755	156	2.1931
792	157	2.1959
828	158	2.1987
864	159	2.2014
899	160	2.2041
934	161	2.2068
969	162	2.2095
004	163	2.2122
038	164	2.2148
072	165	2.2175
106	166	2.2201
139	167	2.2227
173	168	2.2253
206	169	2.2279
239	170	2.2304
271	171	2.2330
303	172	2.2355
335	173	2.2380
367	174	2.2405
399	175	2.2430
430	176	2.2455
461	177	2.2480
492	178	2.2504
523	179	2.2529
553	180	2.2553
584	181	2.2577
614	182	2.2601
644	183	2.2625
673	184	2.2648
703	185	2.2672

.	G.	Sin.	Tang.
36	66	9.9607	10.3514
37	65	9.9573	10.3313
32	64	9.9537	10.3118
72	63	9.9499	10.2928
57	62	9.9459	10.2743
38	61	9.9418	10.2572
14	60	9.9375	10.2386
38	59	9.9331	10.2212
58	58	9.9284	10.2042
25	57	9.9236	10.1875
90	56	9.9186	10.1710
52	55	9.9134	10.1548
13	54	9.9080	10.1387
71	53	9.9023	10.1229
48	52	9.8965	10.1072
34	51	9.8905	10.0916
38	50	9.8843	10.0762
02	49	9.8778	10.0608
14	48	9.8711	10.0456
97	47	9.8641	10.0303
48	46	9.8569	10.0152
00	45	9.8495	10.0000

B

F.

D

F. 12.

G

A

F. 1

B

F. 24.

D

b

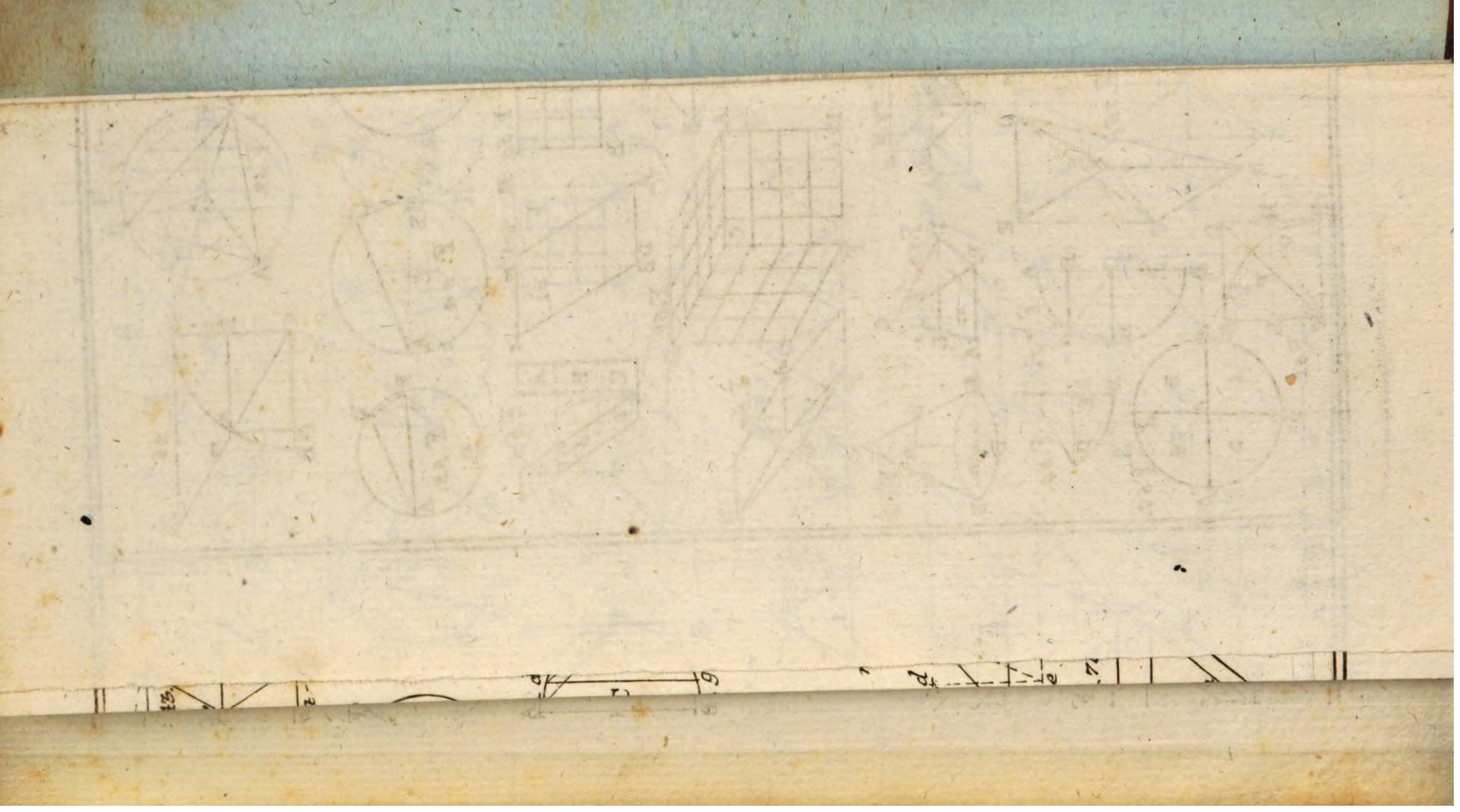
e

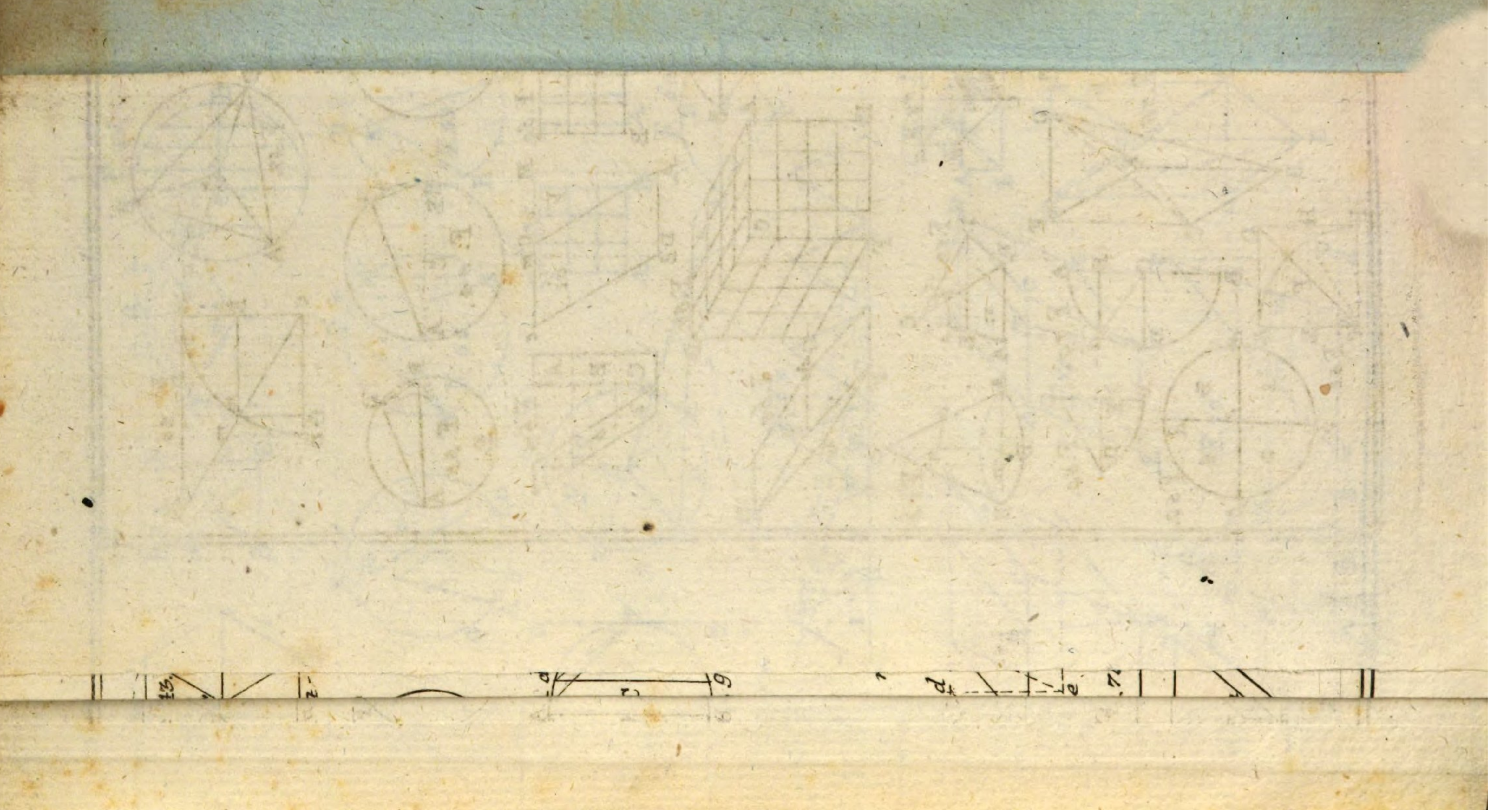
F

B

F. 3

94155555





F.91.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Helfenzrieder, Johann Evangelist,

Anfangsgründe der reinen Mathematik m. 3 Kt. ; aus dem Lat. übers

Günzburg 1779

Math.p. 211
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081960-8
VD18 12015369-002